Zeller の公式の証明

Zeller の公式とは, 与えられた年月日の曜日を計算するときに用いられる式である.

［定理 1（Zeller の公式）］ 西暦 y 年 m 月 d 日の曜日 w は,

$$Y = \begin{cases} y-1, & m \leq 2 \text{ のとき}, \\ y, & m > 3 \text{ のとき}, \end{cases} \qquad M = \begin{cases} m+10, & m \leq 2 \text{ のとき}, \\ m-2, & m > 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくとき,

$$w \equiv d + \left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor \pmod 7$$

で得られる[1). ただし, w の値と曜日とは

w	0	1	2	3	4	5	6
曜日	日	月	火	水	木	金	土

のように対応しているものとする. また, 実数 x に対して, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す[2).

以下, 公式を証明する. 大まかな流れとしては, y 年 m 月 d 日に対して,

$$\begin{aligned} N(y,m,d) &= (0 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日から } y \text{ 年 } m \text{ 月 } d \text{ 日までの日数差}) \\ &= (y \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日から } y \text{ 年 } m \text{ 月 } d \text{ 日までの日数差}) \\ &\qquad + (0 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日から } y \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日までの日数差}) \end{aligned}$$

を計算する. w_0 を 0 年 1 月 1 日の曜日とすると, y 年 m 月 d 日の曜日は $w_0 + N(y,\, m,\, d)$ を 7 で割った余りである. これを計算すると, Zeller の公式が得られる.

実際には, 閏年への対処の都合で, 一年を 3 月から数えた年月日に対する式を求める.

閏年に対処するための準備

閏年への対処を簡単にするため, 3 月を 1 番目の月, 4 月を 2 番目の月, ……, 12 月を 10 番目の月とみなし, 1 月, 2 月はそれぞれ前年の 11 番目の月, 12 番目の月とみなす[3).

これを数学的に記述しよう. まず, 西暦 0 年 3 月 1 日から始まる年月日の全体からなる集合を $\mathcal{D}_0$ とおく. $\mathcal{D}_0$ は,

$$\mathcal{D}_0 = \{ (y,m,d) \in \mathbb{N}^3 \mid y \text{ は年}, m \text{ は月}, d \text{ は日} \}$$

のように表すことができ, 辞書式順序について順序集合をなす.

---

1) 文献によって, M の定め方の違いにより, 公式の形が多少異なる.
2) $\lfloor x \rfloor$ は床関数 (ゆかかんすうう) と呼ばれる. ガウス記号 $[x]$ を用いている文献もある.
3) そもそも, 2 月 29 日が閏年の調整日になった経緯が, かつては 2 月が一年の最終月だったことによる.

自然数 y, m, d に対して[4],

$$\begin{aligned} Y &= Y(y,m,d) = \begin{cases} y-1, & m \le 2 \text{ のとき}, \\ y, & m > 3 \text{ のとき}, \end{cases} \\ M &= M(y,m,d) = \begin{cases} m+10, & m \le 2 \text{ のとき}, \\ m-2, & m > 3 \text{ のとき}, \end{cases} \\ D &= D(y,m,d) = d \end{aligned}$$

とおく．これにより, $\mathcal{D}_0$ から $\mathbb{N}^3$ の部分集合への順序同型

$$T : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{N}^3, \quad (y,m,d) \mapsto (Y,M,D)$$

を定めることができる．T によって, y 年 m 月 d 日は Y 年の M 番目の月の D 日目に変換される．具体例を挙げると,

$$\begin{aligned} &Y(2000,2,28) = 1999, \quad M(2000,2,28) = 12, \quad D(2000,2,28) = 28, \\ &T(2000,2,28) = (1999,12,28) \end{aligned}$$

は, 2000 年 2 月 28 日が 1999 年の 12 番目の月の 28 日目であることを表現し,

$$\begin{aligned} &Y(2000,3,1) = 2000, \quad M(2000,3,1) = 1, \quad D(2000,3,1) = 1, \\ &T(2000,3,1) = (2000,1,1) \end{aligned}$$

は, 2000 年 3 月 1 日が 2000 年の 1 番目の月の 1 日目であることを表現している．

$\mathcal{D} = T(\mathcal{D}_0)$ とおく．すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{&(Y,M,D) \in \mathbb{N}^3 \mid \\ &\text{ある } (y,m,d) \in \mathcal{D}_0 \text{ が存在して}, Y = Y(y,m,d),\ M = M(y,m,d),\ D = D(y,m,d)\} \end{aligned}$$

と表せる．この $\mathcal{D}$ がまさに, 3 月を最初の月とみなしたとき, 0 年の 1 番目の月の 1 日目から始まる年月日の全体である．

以後, T による変換前の年月日を $(y,m,d) \in \mathcal{D}_0$ のように表し, 変換後の年月日を $(Y,M,D) \in \mathcal{D}$ のように表すことにする．

$(0,3,1) \in \mathcal{D}_0$ から $(y,m,d) \in \mathcal{D}_0$ までの日数差を $N_0(y,m,d)$ で表す．写像

$$N_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{N}, \quad (y,m,d) \mapsto N_0(y,m,d)$$

は, $\mathcal{D}_0$ から $\mathbb{N}$ への順序同型である．したがって, $\mathcal{D}_0$ は整列集合である[5]．同様に, $(0,1,1) \in \mathcal{D}$ から $(Y,M,D) \in \mathcal{D}$ までの日数差を $N(Y,M,D)$ で表すと, 写像

$$N : \mathcal{D} \to \mathbb{N}, \quad (Y,M,D) \mapsto N(Y,M,D)$$

[4] この文書では, 0 を自然数に含んでいる．すなわち, $\mathbb{N} = (\text{正の整数全体}) \cup \{0\}$ である．

[5] 順序集合 A が整列集合であるとは, その任意の空でない部分集合がつねに最小元をもつときにいう．自然数全体 $\mathbb{N}$ がその代表例である．整列集合の部分集合もまた整列集合である．特に, 正の整数全体は整列集合である．

は, $\mathcal{D}$ から $\mathbb{N}$ への順序同型である．このとき,

$$N_0 = N \circ T.$$

すなわち, 任意の $(y, m, d) \in \mathcal{D}_0$ に対して,

$$N_0(y, m, d) = N(Y, M, D)$$

が成り立つ.

月日に関する情報

x を変数とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \left\lfloor \frac{3x-1}{5} \right\rfloor$$

によって定める．$f(M)$ は 1 番目の月から $M-1$ 番目の月までの間に 31 日目が現れる個数を表している[6].

m	M	日数	$f(M)$	$N(Y, M, 1) - N(Y, 1, 1)$
3	1	31	0	0
4	2	30	1	31
5	3	31	1	61
6	4	30	2	92
7	5	31	2	122
8	6	31	3	153
9	7	30	4	184
10	8	31	4	214
11	9	30	5	245
12	10	31	5	275
1	11	31	6	306
2	12	28	7	337

よって, 年 Y を固定したとき, $(Y, 1, 1) \in \mathcal{D}$ から $(Y, M, 1) \in \mathcal{D}$ までの日数差は,

$$\begin{aligned} N(Y, M, 1) - N(Y, 1, 1) &= 30(M-1) + f(M) \\ &= 30(M-1) + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor. \end{aligned}$$

また, $(Y, M, 1) \in \mathcal{D}$ から $(Y, M, D) \in \mathcal{D}$ までの日数差は,

$$N(Y, M, D) - N(Y, M, 1) = D - 1.$$

[6] $f(x)$ は試行錯誤で見つける．一般には, 勝手に与えられた値の並びを 1 次関数の床関数で表すことはできない．今回のケースでは, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7 の値の並びが直線的だったので, 1 次関数の床関数で表すことができた.

ゆえに, $(Y,1,1) \in \mathcal{D}$ から $(Y,M,D) \in \mathcal{D}$ までの日数差は,

$$\begin{aligned} N(Y,M,D) - N(Y,1,1) &= N(Y,M,D) - N(Y,M,1) + N(Y,M,1) - N(Y,1,1) \\ &= D - 1 + 30(M-1) + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor. \end{aligned}$$

年に関する情報

閏年による補正を行わず単純に一年を 365 日で計算した場合, $(0,1,1) \in \mathcal{D}$ から $(Y,1,1) \in \mathcal{D}$ までの日数差は $365Y$ である.

グレゴリオ暦において, 西暦 y 年が閏年であるかどうかは, 次のルールで決まる.

- y が 4 の倍数でないときは閏年としない
- y が 4 の倍数であり, かつ 100 の倍数でないときは閏年とする
- y が 100 の倍数であり, かつ 400 の倍数でないときは閏年としない
- y が 400 の倍数のときは閏年とする

例えば, 1800 年, 1900 年は閏年ではなく, 2000 年は閏年であり, 2100 年は閏年でない.

上記のルールが, 変換を施す前の年 y に対するものであることに注意せよ. Y が閏年の条件を満たすとき, T による変換前の $(Y,2,29) \in \mathcal{D}_0$ は, 変換後の $(Y-1,12,29) \in \mathcal{D}$ と対応している. 閏年による日数の補正の影響を受けるのは, 変換前の年月日でいえば $(Y,3,1) \in \mathcal{D}_0$ 以降, よって, 変換後の年月日でいえば $(Y,1,1) \in \mathcal{D}$ 以降である.

したがって, $(Y,1,1) \in \mathcal{D}$ の時点で, 閏年によって補正される日数は,

$$\left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor.$$

ゆえに, 閏年を考慮した場合の, $(0,1,1) \in \mathcal{D}$ から $(Y,1,1) \in \mathcal{D}$ までの日数差は,

$$N(Y,1,1) = 365Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor.$$

日数差の公式

月日と年に関する情報を総合すれば,

$$\begin{aligned} N(Y,M,D) &= N(Y,M,D) - N(Y,1,1) + N(Y,1,1) \\ &= D - 1 + 30(M-1) + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor + 365Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor. \end{aligned}$$

このことを定理としてまとめておく.

［定理 2（日数差の公式）］ 西暦 0 年 3 月 1 日から西暦 y 年 m 月 d 日までの日数差は,

$$Y = \begin{cases} y-1, & m \leq 2 \text{ のとき}, \\ y, & m > 3 \text{ のとき}, \end{cases} \quad M = \begin{cases} m+10, & m \leq 2 \text{ のとき}, \\ m-2, & m > 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくとき,

$$d - 1 + 30(M-1) + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor + 365Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor.$$

ただし, 実数 x に対して, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

$(y_1, m_1, d_1), (y_2, m_2, d_2) \in \mathcal{D}_0$ を T による変換前の 2 つの年月日とし, それらを T で変換した後の年月日をそれぞれ $(Y_1, M_1, D_1), (Y_2, M_2, D_2) \in \mathcal{D}$ とする. $N_0 = N \circ T$ だったから,

$$N_0(y_1, m_1, d_1) - N_0(y_2, m_2, d_2) = N(Y_1, M_1, D_1) - N(Y_2, M_2, D_2).$$

つまり, 変換前の 2 つの年月日の日数差は, 変換後の年月日の日数差を計算することで求まる.

Zeller の公式の導出

$(y, m, d) \in \mathcal{D}_0$ を T による変換前の年月日, $(Y, M, D) \in \mathcal{D}$ を変換後の年月日とし, w を (y, m, d) の曜日, w_0 を $(0, 3, 1) \in \mathcal{D}_0$ の曜日とする. $N_0(y, m, d) = N(Y, M, D)$ であるから,

$$w \equiv w_0 + N(Y,\, M,\, D) \pmod{7}.$$

$(2000, 3, 5) \in \mathcal{D}_0$ は日曜日である. $Y(2000, 3, 5) = 2000$, $M(2000, 3, 5) = 1$, $D(2000, 3, 5) = 5$ であるから,

$$0 \equiv w_0 + N(2000, 1, 5) \pmod{7}.$$

一方, 日数差の公式より,

$$N(2000, 3, 5) = 5 - 1 + 30 \cdot 0 + 0 + 365 \cdot 2000 + 500 - 20 + 5 \equiv -3 \pmod{7}.$$

ゆえに, $w_0 \equiv 3 \pmod{7}$ が得られる. w_0 は定数なので,

$$w \equiv 3 + N(Y, M, D) \pmod{7}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} &3 + D - 1 + 30(M-1) + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor + 365Y \\ &\quad \equiv D + 2M + \left\lfloor \frac{3M-1}{5} \right\rfloor + Y \pmod{7} \\ &\quad = D + \left\lfloor 2M + \frac{3M-1}{5} \right\rfloor + Y = D + \left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor + Y \end{aligned}$$

より, Zeller の公式

$$w \equiv D + \left\lfloor \frac{13M-1}{5} \right\rfloor + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor \pmod{7}$$

が得られる.