1　樹形結合の確率空間と条件付確率

1.1　2 段階の樹形結合

(Ω_0, P_0) を確率空間とする．Ω_0 の各点 a に対して確率空間 (Ω_a, P_a) が定まっているとき，

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) \mid x \in \Omega_0, y \in \Omega_x\},\\ P(\{(x,y)\}) &= P_0(\{x\})P_x(\{y\})\end{aligned}$$

とおくと，確率空間 (Ω, P) が定まる．これを**樹形結合の確率空間**という．

$$\begin{tikzcd}
 & (\Omega_a, P_a) \\
(\Omega_0, P_0) \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "c"'] & (\Omega_b, P_b) \\
 & (\Omega_c, P_c)
\end{tikzcd}$$

［命題 1］ $s \in \Omega_0$, $t \in \bigcup_{x\in\Omega_0} \Omega_x$ とし，$P_0(\{s\}) \neq 0$ と仮定する．

$$\begin{aligned}A_s &= \{s\} \times \Omega_s = \{(s,y) \in \Omega \mid y \in \Omega_s\},\\ H &= \{(x,t) \in \Omega \mid x \in \Omega_0\}\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_s,\\ &P(A_s) = P_0(\{s\}),\\ &P(H \mid A_s) = \begin{cases} P_s(\{t\}), & t \in \Omega_s \text{ のとき},\\ 0, & t \notin \Omega_s \text{ のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ．

［証明］ Ω が A_1, A_2, ..., A_s の直和で表されることは，それぞれの定義から明らかである．
$P(A_s)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}P(A_s) &= \sum_{y\in\Omega_s} P(\{(s,y)\}) = \sum_{y\in\Omega_s} P_0(\{s\})P_s(\{y\})\\ &= P_0(\{s\}) \sum_{y\in\Omega_s} P_s(\{y\}) = P_0(\{s\})P_s(\Omega_s)\\ &= P_0(\{s\}).\end{aligned}$$

次に，$t \in \Omega_s$ のとき，

$$A_s \cap H = \{(s,t)\}.$$

よって，

$$P(A_s \cap H) = P(\{(s,t)\}) = P_0(\{s\})P_s(\{t\}) = P(A_s)P_s(\{t\}).$$

ゆえに,

$$P(H \mid A_s) = \frac{P(A_s \cap H)}{P(A_s)} = P_s(\{t\}).$$

$t \notin \Omega_s$ のとき, $A_s \cap H = \emptyset$ だから, $P(A_s \cap H) = 0$ である. $P_0(\{s\}) \neq 0$ と仮定したので, $P(A_s) \neq 0$. したがって, $P(H \mid A_s) = 0$ である. □

1.2 3 段階の樹形結合

3 段階の樹形結合の確率空間も同様に定義できる.

(Ω_0, P_0) を確率空間とする. Ω_0 の各点 a に対して確率空間 (Ω_a, P_a) が定まり, さらに Ω_a の各点 b に対して確率空間 (Ω_{ab}, P_{ab}) が定まっているとき,

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y, z) \mid x \in \Omega_0, y \in \Omega_x, z \in \Omega_{xy}\}, \\ P(\{(x, y, z)\}) &= P_0(\{x\}) P_x(\{y\}) P_{xy}(\{z\}) \end{aligned}$$

とおくと, 確率空間 (Ω, P) が定まる.

$$\begin{tikzcd}
 & & (\Omega_{a'}, P_{a'}) \\
 & (\Omega_a, P_a) \arrow[ur, "a'"] \arrow[r, "b'"] \arrow[dr, "c'"'] & (\Omega_{b'}, P_{b'}) \\
(\Omega_0, P_0) \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "c"'] & (\Omega_b, P_b) & (\Omega_{c'}, P_{c'}) \\
 & (\Omega_c, P_c) &
\end{tikzcd}$$

[命題 2] $s \in \Omega_0$, $t \in \Omega_s$, $u \in \bigcup_{x \in \Omega_0,\, y \in \Omega_s} \Omega_{xy}$ とし, $P_0(\{s\}) P_s(\{t\}) \neq 0$ と仮定する.

$$\begin{aligned} A_s &= \{(s, y, z) \in \Omega \mid y \in \Omega_s, z \in \Omega_{st}\}, \\ B_t &= \{(x, t, z) \in \Omega \mid x \in \Omega_0, z \in \Omega_{tx}\}, \\ H &= \{(x, y, u) \in \Omega \mid x \in \Omega_0, y \in \Omega_s\} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} &\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_s, \\ &P(A_s) = P_0(\{s\}), \\ &P(B_t \mid A_s) = P_s(\{t\}), \\ &P(H \mid A_s \cap B_t) = \begin{cases} P_{st}(\{u\}), & u \in \Omega_{st} \text{ のとき}, \\ 0, & u \notin \Omega_{st} \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ.

[証明] Ω が A_1, A_2, ..., A_s の直和で表されることは, それぞれの定義から明らかである.

$P(A_s)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
P(A_s) &= \sum_{y\in\Omega_s}\sum_{z\in\Omega sy} P(\{(s,y,z)\}) \\
&= \sum_{y\in\Omega_s}\sum_{z\in\Omega_{st}} P_0(\{s\})P_s(\{y\})P_{st}(\{z\}) \\
&= P_0(\{s\})\sum_{y\in\Omega_s} P_s(\{y\}) \sum_{z\in\Omega_{st}} P_{st}(\{z\}) \\
&= P_0(\{s\})\sum_{y\in\Omega_s} P_s(\{y\})P_{st}(\Omega_{st}) \\
&= P_0(\{s\})\sum_{y\in\Omega_s} P_s(\{y\}) \\
&= P_0(\{s\})\sum_{y\in\Omega_s} P_s(\Omega_s) \\
&= P_0(\{s\}).
\end{aligned}$$

また,

$$A_s \cap B_t = \{(s,t,z)\in\Omega \mid z\in\Omega_{st}\}.$$

$P(A_s\cap B_t)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
P(A_s\cap B_t) &= \sum_{z\in\Omega_{st}} P(\{(s,t,z)\}) = \sum_{z\in\Omega_{st}} P_0(\{s\})P_s(\{t\})P_{st}(\{z\}) \\
&= P_0(\{s\})P_s(\{t\})\sum_{z\in\Omega_{st}} P_{st}(\{z\}) = P_0(\{s\})P_s(\{t\})P_{st}(\Omega_{st}) \\
&= P_0(\{s\})P_s(\{t\}).
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$P(B_t \mid A_s) = \frac{P(A_s\cap B_t)}{P(A_s)} = P_s(\{t\}).$$

次に, $u\in\Omega_{st}$ のとき,

$$A_s\cap B_t\cap H = \{(s,t,u)\}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
P(A_s\cap B_t\cap H) &= P(\{(s,t,u)\}) \\
&= P_0(\{s\})P_s(\{t\})P_{st}(\{u\}) \\
&= P(A_s)P(B_t \mid A_s)P_{st}(\{u\}).
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$P(H \mid A_s\cap B_t) = \frac{P(A_s\cap B_t\cap H)}{P(A_s\cap B_t)} = P_{st}(\{u\}).$$

$u\notin\Omega_{st}$ のとき, $A_s\cap B_t\cap H=\emptyset$ だから, $P(A_s\cap B_t\cap H)=0$ である. $P_0(\{s\})P_s(\{t\})\neq 0$ と仮定したので, $P(A_s\cap B_t)\neq 0$. したがって, $P(H \mid A_s\cap B_t)=0$ である. □

2 例題

例題として, 目隠し抽選会問題[1)]を解いてみる.

［問題 1（目隠し抽選会問題）］ 部屋の中には, 司会者を除き 100 人の人がいて, 中村さんもその 1 人です. クジは 101 本あって, その中の 1 本だけが当たりです. 中村さんには, いまから目隠しをしてもらいます.

渡辺さんだけが 2 本, 他の人たちは 1 本ずつ引いてもらうことに決めました. いま, みんながクジを引き終わりましたが, まだだれも中を見ていません. みんなで自分のクジを開いてみます. 中村さんは目隠しをしているので見えません.

さて, はずれた人は 1 人ずつ部屋から出てもらいます. 中村さんはこのまま待ちます.

(i) 98 人がランダム順に出て行ったところで, 司会者がストップをかけ, 「いま 98 人出たところです」と言いました. このとき, 中村さんのくじが当たりである (条件付) 確率はいくらでしょうか.

(ii) 司会者はさらに, 「残った人は, クジを 2 本引いた渡辺さんです」と言いました. このとき, 中村さんのくじが当たりである (条件付) 確率はいくらでしょうか.

(iii) 司会者はさらに, 渡辺さんの 2 本のくじのうちはずれのほうを回収しました. このとき, 中村さんのくじが当たりである (条件付) 確率はいくらでしょうか.

以下で述べる解答は, 冗長に見えるかもしれないが, それは問題文の内容を忠実に定式化しているためである.

(i) の解答

中村さんらがくじを引く試行の確率空間 (Ω_0, P_0) は,

$$\Omega_0 = \{a_1, a_2, \dots a_{100}\},$$
$$P_0(\{a_1\}) = P_0(\{a_3\}) = \cdots = P_0(\{a_{100}\}) = \frac{1}{101}, \quad P_0(\{a_2\}) = \frac{2}{101}$$

によって定まる. ここで, 中村さんが当選する場合を $a_1 \in \Omega_0$, 渡辺さんが当選する場合を $a_2 \in \Omega_0$, それ以外の人が当選する場合をそれぞれ $a_3 \in \Omega_0, \dots, a_{100} \in \Omega_0$ とする.

また, 98 人がランダムに出て行く試行の確率空間については, 中村さんが当選であるときの確率空間 (Ω_1, P_1) は,

$$\Omega_1 = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_{98}}) \mid i_1, \dots, i_{98} \text{ は 2 から 100 の数から 98 個を取り出す順列 }\},$$
$$P_1(\{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_{98}})\}) = \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{98} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{99!}$$

によって定まり, それ以外の各人が当選であるときの確率空間 (Ω_j, P_j) $(j = 2, 3, \dots, 100)$ はそれぞれ,

$$\Omega_j = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_{98}}) \mid i_1, \dots, i_{98} \text{ は } j \text{ を除く 2 から 100 の数から 98 個を取り出す順列 }\},$$
$$P_j(\{(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_{98}})\}) = \frac{1}{98} \cdot \frac{1}{97} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{98!}$$

1) [2], p.106 を参照.

によって定まる．ここで, 例えば $(a_3,\, a_4,\, \ldots\, a_{100}) \in \Omega_2$ は, 番号 2 に対応する人 (渡辺さん) が当選するとき, 番号 3 に対応する人, 番号 4 に対応する人, ..., 番号 100 に対応する人がこの順番で出て行く場合を表している．

中村さんらがくじを引く試行と 98 人がランダムに出て行く試行との樹形結合の確率空間を (Ω, P) とおく．

中村さんが当選しているという事象を A_1, 渡辺さんが当選しているという事象を A_2, それ以外の人が当選している事象をそれぞれ A_3, ..., A_{100} とすると, $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, 100$ に対して,

$$A_j = \{(a_i, (a_{i_1},\, a_{i_2},\, \ldots\, a_{i_{98}})) \in \Omega \mid (a_{i_1},\, a_{i_2},\, \ldots\, a_{i_{98}}) \in \Omega_j\}.$$

さらに,

$$\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_{100},$$
$$P(A_1) = P(A_3) = \cdots = P(A_{100}) = \frac{1}{101}, \quad P(A_2) = \frac{2}{101}.$$

渡辺さんが残るという事象を B_2, それ以外の人が残るという事象をそれぞれ B_3, ..., B_{100} とする．ここで, A_i と B_i の主体となる人が同一であるように番号 i を振る．ある人が残ることと, その人以外の 98 人が出て行くことは同値であるから, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 100$; $j = 2,\, 3,\, \ldots,\, 100$ に対して,

$$B_j = \{(x, (a_{i_1},\, a_{i_2},\, \ldots\, a_{i_{98}})) \in \Omega \mid x \in \Omega_0,\ \text{各}\ i_k\ \text{の中に}\ j\ \text{は現れない}\ \},$$
$$A_i \cap B_j = \{(a_i, (a_{i_1},\, a_{i_2},\, \ldots\, a_{i_{98}})) \mid (a_{i_1},\, a_{i_2},\, \ldots\, a_{i_{98}}) \in \Omega_i,\ \text{各}\ i_k\ \text{の中に}\ j\ \text{は現れない}\ \}.$$

このとき,

$$P(A_1 \cap B_j) = P_0(\{a_1\}) \sum_{\boldsymbol{x} \in A_1 \cap B_j} P_1(\boldsymbol{x}) = P_0(\{a_1\}) \cdot \frac{98!}{99!} = P_0(\{a_1\}) \cdot \frac{1}{99},$$

$$P(B_j \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_j)}{P(A_1)} = \frac{P_0(\{a_1\}) \cdot \dfrac{1}{99}}{P_0(\{a_1\})} = \frac{1}{99},$$

$$P(B_j \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)} = \begin{cases} = \dfrac{P_0(\{a_i\}) P_j(\Omega_j)}{P_0(\{a_i\})} = 1, & i = j\ \text{のとき} \\ = \dfrac{P(\emptyset)}{P_0(\{a_i\})} = 0, & i \neq j\ \text{のとき} \end{cases} \qquad (2 \leq i,\, j \leq 100).$$

なお, 上の計算結果は, 問題 (i) における

- 中村さんが当選しているとき, 中村さん以外の各人が残る確率はそれぞれ $\dfrac{98}{99} \cdot \dfrac{97}{98} \cdots \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{99}$ ずつ．
- 当選者は退場しないので, 中村さん以外の人が当選しているとき, その人が必ず残る．

といった状況を表している．

中村さん以外の 99 人のうち 98 人が出て行く (言い換えれば, 中村さん以外の誰か 1 人だけが残る) 事象を B とすると,

$$B = B_2 + B_3 + \cdots + B_{100}.$$

よって, 各 $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 100$ に対して,

$$P(B \mid A_i) = \sum_{j=2}^{100} P(B_j \mid A_i) = 1,$$

ゆえに, Bayes の定理により,

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{100} P(A_i)P(B \mid A_i)} = \frac{P(A_1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{100} P(A_i)} = \frac{P(A_1)}{P(\Omega)} = \frac{1}{101}.$$

(ii) の解答

記号は (i) の通りとする. 問題 (ii) の状況を整理すると,

- 中村さんのくじが当たりのとき, 渡辺さんが残る確率は 1/99.
- 渡辺さんのくじが当たりのとき, 渡辺さんが残る確率は 1.
- 中村さんでも渡辺さんでもない任意の第三者のくじが当たりのとき, その人が残る確率は 1.

すなわち,

$$P(B_2 \mid A_1) = \frac{1}{99}, \quad P(B_2 \mid A_2) = 1, \quad P(B_2 \mid A_3) = \cdots = P(B_2 \mid A_{100}) = 0.$$

ゆえに, Bayes の定理により,

$$\begin{aligned} P(A_1 \mid B_2) &= \frac{P(A_1)P(B_2 \mid A_1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{100} P(A_i)P(B_2 \mid A_i)} \\ &= \frac{P(A_1)P(B_2 \mid A_1)}{P(A_1)P(B_2 \mid A_1) + P(A_2)P(B_2 \mid A_2)} \\ &= \frac{1/101 \cdot 1/99}{1/101 \cdot 1/99 + 2/101 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{199}. \end{aligned}$$

(iii) の解答

中村さんらがくじを引く試行, 98 人がランダムに出て行く試行, 司会者が渡辺さんのはずれくじを 1 本回収する試行の (3 段階の) 樹形結合の確率空間を (Ω', P') とおく.

中村さんが当選しているという事象を A'_0, 渡辺さんの 1 本目のくじが当選しているという事象を A'_1, 渡辺さんの 2 本目のくじが当選しているという事象を A'_2, それ以外の人が当選している事象をそれぞれ $A'_3, \ldots, A'_{100}$ とする. また, 渡辺さんが残るという事象を B' とする. $P'(A'_i)$ や $P'(B' \mid A'_i)$ については, (i) や (ii) のときと同様にして計算できる:

$$\begin{aligned} &\Omega = A'_0 + A'_1 + A'_2 + A'_3 + \cdots + A'_{100}, \\ &P(A'_0) = P(A'_1) = P(A'_2) = P(A'_3) = \cdots = P(A'_{100}) = \frac{1}{101}, \\ &P(B' \mid A'_0) = \frac{1}{99}, \quad P(B' \mid A'_1) = P(B' \mid A'_2) = 1, \\ &P(B' \mid A'_3) = \cdots = P(B' \mid A'_{100}) = 0. \end{aligned}$$

いま, 問題 (iii) の状況を整理すると,

- 中村さんが当選し, 渡辺さんが残るとき, 司会者が渡辺さんの 1 本目のくじを回収する確率と 2 本目のくじを回収する確率は 1/2 ずつ.
- 渡辺さんの 1 本目のくじが当たり, 渡辺さんが残るとき, 司会者が渡辺さんの 2 本目のくじを回収する確率は 1.
- 渡辺さんの 2 本目のくじが当たり, 渡辺さんが残るとき, 司会者が渡辺さんの 1 本目のくじを回収する確率は 1.
- それ以外の人が当選し, 渡辺さんが残る確率は 0.

司会者が渡辺さんの 1 本目のくじを回収するという事象を C'_1, 2 本目のくじを回収するという事象を C'_2 とすると, 最初の 3 つの項目より,

$$
\begin{aligned}
&P'(C'_1 \mid A'_0 \cap B') = P'(C'_2 \mid A'_0 \cap B') = \frac{1}{2},\\
&P'(C'_1 \mid A'_1 \cap B') = 0, \quad P'(C'_2 \mid A'_1 \cap B') = 1,\\
&P'(C'_1 \mid A'_2 \cap B') = 1, \quad P'(C'_2 \mid A'_2 \cap B') = 0.
\end{aligned}
$$

司会者が渡辺さんのはずれくじを回収するという事象を C' とすれば, $C' = C'_1 + C'_2$ であるから,

$$
\begin{aligned}
P'(C' \mid A'_0 \cap B') &= P'(C'_1 \mid A'_0 \cap B') + P'(C'_2 \mid A'_0 \cap B') = 1,\\
P'(C' \mid A'_1 \cap B') &= P'(C'_1 \mid A'_1 \cap B') + P'(C'_2 \mid A'_1 \cap B') = 1,\\
P'(C' \mid A'_2 \cap B') &= P'(C'_1 \mid A'_2 \cap B') + P'(C'_2 \mid A'_2 \cap B') = 1.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
P'(A'_0 \cap B' \cap C') &= P'(A'_0 \cap B')P'(C' \mid A'_1 \cap B')\\
&= P'(A'_0)P'(B' \mid A'_0)P'(C' \mid A'_0 \cap B')\\
&= \frac{1}{101} \cdot \frac{1}{99} \cdot 1 = \frac{1}{9999},\\
P'(A'_i \cap B' \cap C') &= P'(A'_i \cap B')P'(C' \mid A'_2 \cap B')\\
&= P'(A'_i)P'(B' \mid A'_i)P'(C' \mid A'_i \cap B')\\
&= \frac{1}{101} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{101} \quad (i = 1,\, 2).
\end{aligned}
$$

4 つ目の項目は, $P'(A'_3 \cap B') = \cdots = P'(A'_{100} \cap B') = 0$ を意味する. 一般に, 任意の 2 つの事象 X, Y に対して, $X \subseteq Y$ ならば $P'(X) \leq P'(Y)$ が成り立つから,

$$
P'(A'_3 \cap B' \cap C') = \cdots = P'(A'_{100} \cap B' \cap C') = 0.
$$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
P'(B' \cap C') &= \sum_{i=0}^{100} P'(A'_i \cap B' \cap C')\\
&= P'(A'_0 \cap B' \cap C') + P'(A'_1 \cap B' \cap C') + P'(A'_2 \cap B' \cap C')\\
&= \frac{1}{9999} + \frac{1}{101} + \frac{1}{101} = \frac{199}{9999}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
P'(A'_0 \mid B' \cap C') = \frac{P'(A'_0 \cap B' \cap C')}{P'(B' \cap C')} = \frac{1}{199}.
$$

これが求める確率である.

参考文献

[1] 伊藤清: 確率論, 岩波書店, 1991

[2] 市川伸一: 確率の理解を探る 3 囚人問題とその周辺, 共立出版, 1998