1 Tor 群

R を環, X を右 R 加群とし,

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{\rho_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\rho_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0.$$

を X の射影分解とする. ここで, 射影分解は完全系列であり, 各 P_n はすべて射影加群である. $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0$ を $P_0 \xrightarrow{\rho_0} 0$ に置き換えて得られるチェイン複体[1]を $P_\bullet$ とする:

$$P_\bullet: \quad \cdots \to P_n \xrightarrow{\rho_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\rho_1} P_0 \xrightarrow{\rho_0} 0.$$

次に, 左 R 加群 W による共変関手 $? \otimes_R W$ を $P_\bullet$ に施して得られるチェイン複体を $P_\bullet \otimes_R W$ とする:

$$\begin{aligned} P_\bullet \otimes_R W: \quad & \cdots \to P_n \otimes_R W \xrightarrow{\rho_n \otimes W} P_{n-1} \otimes_R W \to \\ & \cdots \to P_1 \otimes_R W \xrightarrow{\rho_1 \otimes W} P_0 \otimes_R W \xrightarrow{\rho_0 \otimes W} 0. \end{aligned}$$

ただし, $\rho_n \otimes W$ $(n \geq 1)$ は

$$\rho_n \otimes W : P_n \otimes_R W \to P_{n-1} \otimes_R W, \quad x \otimes y \mapsto \rho_n(x) \otimes y$$

によって定まる準同型写像である. このチェイン複体のホモロジー群

$$\mathrm{Tor}_n^R(X, W) = H_n(P_\bullet \otimes_R W) = \mathrm{Ker}(\rho_n \otimes W)/\mathrm{Im}(\rho_{n+1} \otimes W)$$

を, n 次の**トージョン群** (torsion group) という. 略して Tor 群と書く.

[注意 1] $H_n(P_\bullet \otimes_R W)$ は, X の射影分解の取り方に依存しないで定まる ([1], 命題 6-1-3).

[定理 2] 任意の右 R 加群 X と左 R 加群 W に対して, $\mathrm{Tor}_0^R(X, W) \cong X \otimes_R W$ が成り立つ.

[証明] X の射影分解における初めの部分

$$P_1 \xrightarrow{\rho_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0.$$

に対して, テンソル積の右完全性より

$$P_1 \otimes_R W \xrightarrow{\rho_1 \otimes W} P_0 \otimes_R W \xrightarrow{\varepsilon \otimes W} X \otimes_R W \to 0$$

は完全系列であり, $\mathrm{Im}(\rho_1 \otimes W) = \mathrm{Ker}(\varepsilon \otimes W)$ が成り立つ. よって,

$$\mathrm{Tor}_0^R(X, W) = \frac{\mathrm{Ker}(\rho_0 \otimes W)}{\mathrm{Im}(\rho_1 \otimes W)} = \frac{P_0 \otimes_R W}{\mathrm{Ker}(\varepsilon \otimes W)} \cong \mathrm{Im}(\varepsilon \otimes W) = X \otimes_R M.$$

□

[1] 各 n について $d_n \circ d_{n+1} = 0$ が成り立つ R 準同型の列 $(d_n \mid n \in \mathbb{Z})$ を**チェイン複体** (chain complex) という.

2 Ext 群

再び X の射影分解から得られるチェイン複体 $P_\bullet$ を考える.

右 R 加群 Z による反変関手 $\mathrm{Hom}_R(?, Z)$ を $P_\bullet$ に施して得られるコチェイン複体[2)] を $\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, Z)$ とする:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, Z):\quad 0 &\xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_0,Z)} \mathrm{Hom}_R(P_0, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_1,Z)} \mathrm{Hom}_R(P_1, Z) \to \cdots \\ &\to \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_n,Z)} \mathrm{Hom}_R(P_n, Z) \to \cdots.\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{Hom}(\rho_n, Z)$ $(n \geq 1)$ は

$$\mathrm{Hom}(\rho_n, Z): \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, Z) \to \mathrm{Hom}_R(P_n, Z), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \rho_n$$

によって定まる準同型写像である. このコチェイン複体のコホモロジー群

$$\mathrm{Ext}^n_R(X, Z) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, Z)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_{n+1}, Z))/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\rho_n, Z))$$

を, n 次の**エクステンション群** (extension group) という. 略して Ext 群と書く.

[注意 3] $H^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, Z))$ は, X の射影分解の取り方に依存しないで定まる ([1], 命題 6-1-4).

[定理 4] 任意の右 R 加群 X, Z に対して, $\mathrm{Ext}^0_R(X, Z) \cong \mathrm{Hom}_R(X, Z)$ が成り立つ.

[証明] X の射影分解における初めの部分

$$P_1 \xrightarrow{\rho_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0.$$

に対して, Hom の左完全性より

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\varepsilon,Z)} \mathrm{Hom}_R(P_0, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_1,Z)} \mathrm{Hom}_R(P_1, Z)$$

は完全系列であり, $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\varepsilon, Z)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_1, Z))$ が成り立つ. よって,

$$\mathrm{Ext}^0_R(X, Z) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_1, Z))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\rho_0, Z))} \cong \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\varepsilon, Z)) \cong \mathrm{Hom}_R(X, Z).$$

□

[2)]各 n について $d_{n+1} \circ d_n = 0$ が成り立つ R 準同型の列 $(d_n \mid n \in \mathbb{Z})$ を**コチェイン複体** (cochain complex) という. 準同型写像の方向がチェイン複体と逆になる. 参考文献 [1] では, 両者をまとめて複体と呼んでいる.

3 Tor 群と Ext 群の計算例

[定理 5] m, n を 2 以上の整数とし, $d = \gcd(m, n)$ とする. このとき,

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & i \geq 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, & i = 0, 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & i \geq 2 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, & i = 0, 1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

[証明] $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の射影分解は

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

ここで, ρ_1 は m 倍写像 $[m]$ であり, ε は自然な準同型である. この射影分解の長さから, 任意の $\mathbb{Z}$ 加群 W に対して,

$$i \geq 2 \Rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, W) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, W) = 0$$

が成り立つことがわかる. また,

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},$$
$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

さて, 上の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の射影分解において, 右端の $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0$ を $\mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_0} 0$ に置き換えたチェイン複体

$$P_\bullet : \quad 0 \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_0} 0.$$

を考える.

$P_\bullet$ に共変関手 $? \otimes_R \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を施すと, チェイン複体

$$0 \xrightarrow{\rho_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\rho_0 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 0.$$

が得られる. 一方, $\mathbb{Z}$ 加群としての同型

$$\varphi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad r \otimes x \mapsto rx$$

より, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] & r \otimes x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & mr \otimes x \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "{[m]}"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & rx \arrow[r, mapsto] & m(rx) = (mr)x
\end{tikzcd}$$

は可換で,

$$\varphi(\mathrm{Ker}(\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \varphi(\mathrm{Ker}(\varphi \circ (\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))) = \varphi(\mathrm{Ker}([m] \circ \varphi)) = \mathrm{Ker}([m]).$$

ただし, 最後の等号は,

$$\begin{aligned} x \in \varphi(\mathrm{Ker}([m]\circ\varphi)) &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \in \mathrm{Ker}([m]\circ\varphi) \\ &\Leftrightarrow ([m]\circ\varphi)(\varphi^{-1}(x)) = 0 \Leftrightarrow [m](x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}([m]) \end{aligned}$$

よりわかる. また,

$$\varphi(\mathrm{Im}(\rho_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \varphi(\{0\}) = \{0\}.$$

したがって, $n = n'd$ とおくと,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{Ker}(\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}{\mathrm{Im}(\rho_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} &\cong \frac{\varphi(\mathrm{Ker}(\rho_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))}{\varphi(\mathrm{Im}(\rho_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))} \\ &= \mathrm{Ker}([m]) = n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$P_\bullet$ に反変関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(?, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を施すと, コチェイン複体

$$0 \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho_2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} 0$$

が得られる. 一方, $\mathbb{Z}$ 加群としての同型

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f \mapsto f(1)$$

より, 図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})"] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, "\psi"] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \circ [m] \arrow[d, mapsto] \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "{[m]}"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & f(1) \arrow[r, mapsto] & m \cdot f(1) = f(m \cdot 1) \end{tikzcd}$$

は可換で,

$$\begin{aligned} \psi(\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))) &= \mathrm{Im}(\psi \circ \mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \mathrm{Im}([m] \circ \psi) \\ &= \mathrm{Im}([m]) = m \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

また,

$$\psi(\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))) = \psi(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))} \cong \frac{\psi(\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\rho_2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})))}{\psi(\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\rho_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})))} \\ &= \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 岩永恭雄, 佐藤眞: 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002.

[2] 河内昭夫: 線形代数からホモロジーへ, 培風館, 2000