1　テンソル積の計算例

[定理 1] 任意の左 R 加群 M に対して, $R \otimes_R M \cong M$ が成り立つ.

[証明] スカラー倍の写像

$$R \times M \to M, \quad (r, x) \mapsto rx$$

は R 上双線型だから, テンソル積の普遍性により, R 準同型

$$f : R \otimes_R M \to M, \quad r \otimes x \mapsto rx$$

が存在する. 一方, 写像

$$g : M \to R \otimes_R M, \quad x \mapsto 1 \otimes x$$

は R 準同型であり, 任意の $r \in R$, $x \in M$ に対して,

$$f \circ g(x) = f(1 \otimes x) = x,$$
$$g \circ f(r \otimes x) = g(rx) = 1 \otimes rx = r \otimes x.$$

ゆえに, $g \circ f$, $f \circ g$ はともに恒等写像である. よって, f は全単射である.
　したがって, f は R 上の同型写像である. □

[例 2] 任意の環 R に対して, $R \otimes_R R \cong R$.
　n を 2 以上の整数とするとき, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[定理 3] m を正の整数とするとき, 任意の $\mathbb{Z}$ 加群 M に対して, $m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong M$.

[証明] 写像

$$m\mathbb{Z} \times M \to M, \quad (mr, x) \mapsto rx$$

は $\mathbb{Z}$ 上双線型だから, テンソル積の普遍性により, $\mathbb{Z}$ 準同型

$$f : m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M, \quad mr \otimes x \mapsto rx$$

が存在する. 一方, 写像

$$g : M \to m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \quad x \mapsto m \otimes x$$

は $\mathbb{Z}$ 準同型であり, 任意の $r \in \mathbb{Z}$, $x \in M$ に対して,

$$f \circ g(x) = f(m \otimes x) = x,$$
$$g \circ f(mr \otimes x) = g(rx) = m \otimes rx = mr \otimes x.$$

ゆえに, $g \circ f$, $f \circ g$ はともに恒等写像である. よって, f は全単射である.
したがって, f は $\mathbb{Z}$ 上の同型写像である. □

[例 4] m, n を 2 以上の整数とするとき, $m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[定理 5] R を整域, K をその商体とするとき, $K \otimes_R K \cong K$.

[証明] 写像

$$K \times K \to K, \quad (x, y) \mapsto xy$$

は R 上双線型だから, テンソル積の普遍性より, R 準同型

$$f : K \otimes K \to K, \quad x \otimes y \mapsto xy$$

が存在する. 一方, 写像

$$g : K \to K \otimes_R K, \quad x \mapsto 1 \otimes x$$

は R 準同型であり, 任意の $x \in K$ に対して,

$$f \circ g(x) = f(1 \otimes x) = x.$$

また, 任意の x, $y \in K$ に対して,

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{c}{d} \quad (a, b, c, d \in R,\ b \neq 0,\ d \neq 0)$$

とおくと,

$$1 \otimes xy = 1 \otimes \frac{ac}{bd} = a \otimes \frac{c}{bd} = \frac{ab}{b} \otimes \frac{c}{bd} = \frac{a}{b} \otimes \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = x \otimes y.$$

よって,

$$g \circ f(x \otimes y) = g(xy) = 1 \otimes xy = x \otimes y.$$

ゆえに, $g \circ f$, $f \circ g$ はともに恒等写像である. よって, f は全単射である.
したがって, f は R 上の同型写像である. □

[例 6] $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

[定理 7] M を可除 $\mathbb{Z}$ 加群[1], m を 2 以上の整数とする. このとき, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$.

[1] すなわち, 任意の $x \in M$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して, ある $y \in M$ が存在して, $x = ry$ が成り立つものとする.

[証明] $x \in \mathbb{Z}$, $y \in M$ を任意にとる．M は可除 $\mathbb{Z}$ 加群なので, ある $y' \in M$ が存在して, $y = my'$ が成り立つ．よって,

$$(x + m\mathbb{Z}) \otimes y = (x + m\mathbb{Z}) \otimes my' = (mx + m\mathbb{Z}) \otimes y' = (0 + m\mathbb{Z}) \otimes y' = 0.$$

□

[例 8] $\mathbb{Q}$ は可除 $\mathbb{Z}$ 加群である．実際, 任意の $x \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して, $y = x/r$ とおけば, $x = ry$, $y \in \mathbb{Q}$ となる．したがって, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

[例 9] $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は可除 $\mathbb{Z}$ 加群である．実際, 任意の $x \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して, $y = x/r$ とおけば,

$$x + \mathbb{Z} = ry + \mathbb{Z} = r \cdot (y + \mathbb{Z})$$

となる．したがって, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

[定理 10] m, n を 2 以上の整数とし, $d = \gcd(m, n)$ とするとき, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

[証明] $\mathbb{Z}$ 準同型

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad x \mapsto (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (x + n\mathbb{Z})$$

を考える．任意の $z \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して,

$$z = \sum_{i=1}^{r} c_i((x_i + m\mathbb{Z}) \otimes (y_i + n\mathbb{Z})), \quad c_i, x_i, y_i \in \mathbb{Z}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{r} c_i((1 + m\mathbb{Z}) \otimes (x_i y_i + n\mathbb{Z})) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (c_i x_i y_i + n\mathbb{Z}) \\ &= (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (w + n\mathbb{Z}), \quad w = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i y_i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

より, $f(w) = z$ となる．よって, f は全射である．

$d = \gcd(m, n)$ より, ある s, $t \in \mathbb{Z}$ が存在して, $d = ms + nt$ と表せる．このとき, 任意の $y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(dy) &= (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (dy + n\mathbb{Z}) \\ &= (1 + m\mathbb{Z}) \otimes ((msy + nty) + n\mathbb{Z}) \\ &= (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (msy + n\mathbb{Z}) + (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (nty + n\mathbb{Z}) \\ &= (msy + m\mathbb{Z}) \otimes (1 + n\mathbb{Z}) + (1 + m\mathbb{Z}) \otimes (nty + n\mathbb{Z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $d\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

写像

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad (x+m\mathbb{Z}, y+n\mathbb{Z}) \mapsto xy + d\mathbb{Z}$$

は $\mathbb{Z}$ 上双線型なので, テンソル積の普遍性により, $\mathbb{Z}$ 準同型

$$g : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad (x+m\mathbb{Z}) \otimes (y+n\mathbb{Z}) \mapsto xy + d\mathbb{Z}$$

が存在する. $x \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると, $f(x) = 0$ なので,

$$x + d\mathbb{Z} = g((1+m\mathbb{Z}) \otimes (x+n\mathbb{Z})) = g \circ f(x) = 0.$$

すなわち, $x \in d\mathbb{Z}$. ゆえに, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq d\mathbb{Z}$ となる. したがって, $\mathrm{Ker}(f) = d\mathbb{Z}$. 準同型定理により, $\mathbb{Z}$ 上の同型

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad x + d\mathbb{Z} \mapsto (1+m\mathbb{Z}) \otimes (x+n\mathbb{Z})$$

が得られ, g がその逆写像になる. $\square$

［別証］ 短完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{[m]} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

に対して, テンソル積の右完全性より

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{[m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

も完全系列である. ここで, $[m]$ は m 倍写像, π は自然な準同型である. また, $\mathbb{Z}$ 準同型 $f : M \to N$ と $\mathbb{Z}$ 加群 W に対して, $f \otimes W$ を

$$f \otimes W : M \otimes_{\mathbb{Z}} W \to N \otimes_{\mathbb{Z}} W, \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes y$$

によって定まる $\mathbb{Z}$ 準同型とする. この完全系列から,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(\pi \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\mathrm{Ker}(\pi \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}([m] \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}.$$

一方, $\mathbb{Z}$ 加群としての同型

$$\varphi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad r \otimes x \mapsto rx$$

より, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "{[m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] & r \otimes x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & mr \otimes x \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "{[m]}"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & rx \arrow[r, mapsto] & m(rx) = (mr)x
\end{tikzcd}$$

は可換で,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{Im}([m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) &= \mathrm{Im}(\varphi\circ([m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \mathrm{Im}([m]\circ\varphi)\\ &= \mathrm{Im}([m]) = m\cdot\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}([m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \cong \frac{\varphi(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}{\varphi(\mathrm{Im}([m]\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))} = \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

□

[定理 11] R を可換環とするとき, $R[X]\otimes_R R[Y]\cong R[X,Y]$.

[証明] 写像

$$R[X]\times R[Y]\to R[X,Y],\quad (f(X),g(Y))\mapsto f(X)g(X)$$

は R 上双線型なので, テンソル積の普遍性により, R 準同型

$$\varphi : R[X]\otimes_R R[Y]\to R[X,Y],\quad f(X)\otimes g(Y)\mapsto f(X)g(X)$$

が存在する. 一方, R 準同型

$$\psi : R[X,Y]\to R[X]\otimes_R R[Y],\quad \sum_{i,j}a_{ij}X^iY^j\mapsto\sum_{i,j}a_{ij}X^i\otimes Y^j$$

を考えると, $\psi\circ\varphi$, $\varphi\circ\psi$ はともに恒等写像である. したがって, φ は同型である. □

[定理 12] p, l を素数とする. M を $\mathbb{Z}$ 加群とし, その位数は l の冪であるとする. このとき,

$$\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}}M\cong\begin{cases}0, & l\neq p,\\ M, & l=p.\end{cases}$$

[証明] $l\neq p$ のとき, $|M|=l^s$ とおくと, $l^sM=0$ だから, 任意の $\alpha\in\mathbb{Z}_p$, $x\in M$ に対して,

$$\alpha\otimes x=\frac{l^s\alpha}{l^s}\otimes x=\frac{\alpha}{l^s}\otimes l^sx=\frac{\alpha}{l^s}\otimes 0=0.$$

$l=p$ のとき, $\mathbb{Z}_{\geq 0}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq 0\}$ とし, 各 $\alpha=(\alpha_n\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\in\varprojlim_n\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_p$ と各 $x\in M$ に対して,

$$\alpha x=a_sx,\quad |M|=p^s,\quad \alpha_s=a_s+p^s\mathbb{Z},\quad a_s\in\mathbb{Z}$$

によってスカラー倍を定めることにより, M は $\mathbb{Z}_p$ 加群になる.

実際, まず, $\alpha_s=a_s+p^s\mathbb{Z}=a'_s+p^s\mathbb{Z}$ のとき, $a_s-a'_s\in p^s\mathbb{Z}$ であり, $p^sM=0$ だから, 任意の $x\in M$ に対して,

$$a_sx-a'_sx=(a_s-a'_s)x=0.$$

ゆえに,

$$\alpha x = a_s x = a'_s x$$

となり, スカラー倍は well-defined である. 次に, $1_{\mathbb{Z}_p}$, $1_{\mathbb{Z}}$ をそれぞれ $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$ の単位元とすると, 任意の $x \in M$ に対して,

$$1_{\mathbb{Z}_p} \cdot x = 1_{\mathbb{Z}} \cdot x = x.$$

さらに, 任意の α, $\beta \in \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$, x, $y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\alpha = (a_n + p^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad \beta = (b_n + p^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とおくと,

$$\alpha + \beta = ((a_n + b_n) + p^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad \alpha\beta = (a_n b_n + p^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であり,

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)x &= a_s b_s x = \alpha(b_s x) = \alpha(\beta x), \\
(\alpha + \beta)x &= (a_s + b_s)x = a_s x + b_s x = \alpha x + \beta x, \\
\alpha(x + y) &= a_s(x + y) = a_s x + a_s y = \alpha x + \alpha y.
\end{aligned}$$

したがって, M は $\mathbb{Z}_p$ 加群をなす.

スカラー倍の写像

$$\mathbb{Z}_p \times M \to M, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

は $\mathbb{Z}$ 上双線型なので, テンソル積の普遍性から, $\mathbb{Z}$ 準同型

$$f : \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M, \quad \alpha \otimes x \mapsto \alpha x$$

が定まる.

一方, 写像

$$g : M \to \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M, \quad x \mapsto 1 \otimes x$$

は $\mathbb{Z}$ 準同型であり, 任意の $x \in M$ に対して,

$$f \circ g(x) = f(1 \otimes x) = 1 \cdot x = x.$$

逆に,

$$g \circ f(\alpha \otimes x) = g(\alpha x) = 1 \otimes \alpha x = 1 \otimes a_s x = a_s \otimes x.$$

また, $\alpha - a_s \in p^s\mathbb{Z}_p$ より,

$$(\alpha - a_s) \otimes x = \frac{p^s(\alpha - a_s)}{p^s} \otimes x = \frac{\alpha - a_s}{p^s} \otimes p^s x = \frac{\alpha - a_s}{p^s} \otimes 0 = 0$$

だから,

$$a_s \otimes x = a_s \otimes x + (\alpha - a_s) \otimes x = \alpha \otimes x.$$

ゆえに, $g \circ f(\alpha \otimes x) = \alpha \otimes x$ となり, $g \circ f$, $f \circ g$ はともに恒等写像である. したがって, f は全単射である.

以上より, f が $\mathbb{Z}$ 上の同型であることが示された. □

[定理 13] p, l を素数とする. M を $\mathbb{Z}$ 加群とし, その位数は l の冪であるとする. このとき,

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \begin{cases} 0, & l = p, \\ M, & l \neq p. \end{cases}$$

ただし,

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] = \left\{ \frac{a}{p^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}, \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}.$$

[証明] $R = \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right]$ とおく.

$p = l$ のとき, 任意の $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in M$ に対して, $|M| = p^s$ とおくと, $p^s M = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{a}{p^n} \otimes x = \frac{p^s a}{p^{n+s}} \otimes x &= \frac{a}{p^{n+s}} \otimes p^s x \\ &= \frac{a}{p^{n+s}} \otimes 0 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに, $R \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$.

$p \neq l$ のとき, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$[p^n] : M \to M, \quad x \mapsto p^n x$$

は $\mathbb{Z}$ 加群の同型である. よって, 逆写像 $[p^n]^{-1}$ が存在する.

各 $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\frac{a}{p^n} \cdot x = a \cdot [p^n]^{-1}(x)$$

によってスカラー倍を定義することにより, M は R 加群になる.

実際, まず, 任意の a, $a' \in \mathbb{Z}$, n, $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in M$ に対して, $\dfrac{a}{p^n} = \dfrac{a'}{p^{n'}}$ のとき, $ap^{n'} - a'p^n = 0$ であり,

$$\begin{aligned} p^{n+n'} \cdot \left(\frac{a}{p^n} \cdot x - \frac{a'}{p^{n'}} \cdot x \right) &= p^{n+n'} \cdot \Big(a \cdot [p^n]^{-1}(x) - a' \cdot [p^{n'}]^{-1}(x) \Big) \\ &= ap^{n'} p^n \cdot [p^n]^{-1}(x) - a' p^n p^{n'} \cdot [p^{n'}]^{-1}(x) \\ &= ap^{n'} x - a' p^n x = (ap^{n'} - a'p^n)x = 0 \cdot x = 0. \end{aligned}$$

$|M|$ は p と互いに素なので, M のすべての元に対して, その位数は p と互いに素である. ゆえに, $\dfrac{a}{p^n} \cdot x - \dfrac{a'}{p^{n'}} x = 0$ でなければならない. よって, $\dfrac{a}{p^n} \cdot x = \dfrac{a'}{p^{n'}} x$. したがって, スカラー倍は well-defined である.

次に, 任意の $a, b \in \mathbb{Z}$, n, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, x, $y \in M$ に対して, $n \leq m$ のとき,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{p^n} + \frac{b}{p^m}\right) \cdot x &= \frac{a + p^{m-n}b}{p^n} \cdot x = (a + p^{m-n}b) \cdot [p^n]^{-1}(x) \\ &= a \cdot [p^n]^{-1}(x) + p^{m-n}b \cdot [p^n]^{-1}(x) \\ &= \frac{a}{p^n} \cdot x + \frac{p^{m-n}b}{p^n} \cdot x \\ &= \frac{a}{p^n} \cdot x + \frac{b}{p^m} \cdot x.\end{aligned}$$

$m > n$ のときも同様である. また, $[p^{n+m}]^{-1} = ([p^m] \circ [p^n])^{-1} = [p^n]^{-1} \circ [p^m]^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{p^n} \cdot \frac{b}{p^m}\right) \cdot x &= \frac{ab}{p^{n+m}} \cdot x = ab \cdot [p^{n+m}]^{-1}(x) \\ &= ab \cdot [p^n]^{-1} \left([p^m]^{-1}(x)\right) \\ &= a \cdot [p^n]^{-1} \left(b \cdot [p^m]^{-1}(x)\right) \\ &= \frac{a}{p^n} \cdot \left(\frac{b}{p^m} \cdot x\right).\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}\frac{a}{p^n} \cdot (x + y) &= a \cdot [p^n]^{-1}(x + y) \\ &= a \cdot \left([p^n]^{-1}(x) + [p^n]^{-1}(y)\right) \\ &= a \cdot [p^n]^{-1}(x) + a \cdot [p^n]^{-1}(y) \\ &= \frac{a}{p^n} \cdot x + \frac{a}{p^n} \cdot y.\end{aligned}$$

$[p^0]$ は恒等写像なので, 1_R, $1_{\mathbb{Z}}$ をそれぞれ R, $\mathbb{Z}$ の単位元とすると,

$$1_R \cdot x = \frac{1_R}{p^0} \cdot x = 1_{\mathbb{Z}} \cdot [p^0]^{-1}(x) = x.$$

したがって, M は R 加群をなす.

スカラー倍の写像

$$R \times M \to M, \quad (r, x) \mapsto rx$$

は $\mathbb{Z}$ 上双線型なので, テンソル積の普遍性により, $\mathbb{Z}$ 準同型

$$f : R \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M, \quad r \otimes x \mapsto rx$$

が存在する.

一方, 写像

$$g : M \to R \otimes_{\mathbb{Z}} M, \quad x \mapsto 1 \otimes x$$

は $\mathbb{Z}$ 準同型であり, 任意の $x \in M$ に対して,

$$f \circ g(x) = f(1 \otimes x) = 1 \cdot x = x.$$

逆に, 任意の $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in M$ に対して,

$$\begin{aligned}
g \circ f\left(\frac{a}{p^n} \otimes x\right) &= g\left(\frac{a}{p^n} \cdot x\right) = 1 \otimes \frac{a}{p^n} \cdot x \\
&= 1 \otimes a \cdot [p^n]^{-1}(x) = a \otimes [p^n]^{-1}(x) \\
&= \frac{p^n a}{p^n} \otimes [p^n]^{-1}(x) = \frac{a}{p^n} \otimes p^n \cdot [p^n]^{-1}(x) \\
&= \frac{a}{p^n} \otimes x.
\end{aligned}$$

よって, $f \circ g$, $g \circ f$ はともに恒等写像である. ゆえに, f は全単射である.

以上より, f が $\mathbb{Z}$ 同型であることが示された. $\square$

[例 14] A を有限 Abel 群とする. $\mathbb{Z}$ 加群として,

$$A \cong \bigoplus_l \mathrm{Syl}_l(A)$$

と直和分解される. ただし, l は素数全体を動く. また, $\mathrm{Syl}_l(A)$ は A の l-Sylow 部分群である. $\mathrm{Syl}_l(A)$ は, 位数が l の冪であるような A の部分群のうちで最大のものである. このとき, テンソル積と直和との可換性から,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A &\cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_l \mathrm{Syl}_l(A)\right) \cong \bigoplus_l \left(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Syl}_l(A)\right) \\
&\cong \mathrm{Syl}_p(A). \\
\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} A &\cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_l \mathrm{Syl}_l(A)\right) \cong \bigoplus_l \left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Syl}_l(A)\right) \\
&\cong \bigoplus_{l \neq p} \mathrm{Syl}_l(A) \cong A/\mathrm{Syl}_p(A).
\end{aligned}$$

参考文献

[1] 岩永恭雄, 佐藤眞: 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002.