1　半直積

定理 1.1.　$H,\, N$ を群とする．H の N への作用 θ が与えられているとする：

$$\theta : H \times N \longrightarrow N, \qquad (h,\, n) \longmapsto n^h.$$

直積集合 $H \times N$ の 2 つの元 $(h_1,\, n_1),\, (h_2,\, n_2)$ の積を次のように定める：

$$(h_1,\, n_1)(h_2,\, n_2) = (h_1 h_2,\, n_1^{h_2} n_2).$$

このとき，$H \times N$ は上の積に関して群をなす．

この群を作用 θ によって作られる H と N の**半直積**といい，$H \ltimes N$，あるいは θ を明示して $H \ltimes_\theta N$ で表す．

証明.　まず，積の結合法則が成り立つことを証明する．H の元 $h_1,\, h_2,\, h_3$ と N の元 $n_1,\, n_2,\, n_3$ をとれば，$H,\, N$ の中の積における結合法則と作用の性質から，

$$\begin{aligned}
&\bigl((h_1,\, n_1)(h_2,\, n_2)\bigr)(h_3,\, n_3)\\
&\qquad = (h_1 h_2,\, n_1^{h_2} n_2)(h_3,\, n_3) = ((h_1 h_2) h_3,\, (n_1^{h_2} n_2)^{h_3} n_3)\\
&\qquad = (h_1 (h_2 h_3),\, \bigl((n_1^{h_2})^{h_3} n_2^{h_3}\bigr) n_3) = (h_1 (h_2 h_3),\, (n_1^{h_2 h_3} n_2^{h_3}) n_3)\\
&\qquad = (h_1 (h_2 h_3),\, n_1^{h_2 h_3} (n_2^{h_3} n_3)) = (h_1,\, n_1)(h_2 h_3,\, n_2^{h_3} n_3)\\
&\qquad = (n_1 n_1)\bigl((h_2,\, n_2)(h_3,\, n_3)\bigr)
\end{aligned}$$

となって，結合法則が成立する．

$(1_H,\, 1_N)$ が単位元である．なぜなら，H の元 h と N の元 n に対して，

$$\begin{aligned}
(h,\, n)(1_H,\, 1_N) &= (h 1_H,\, n^{1_H} 1_N) = (h,\, n 1_N) = (h,\, n),\\
(1_H,\, 1_N)(h,\, n) &= (1_H h,\, 1_N^h n) = (1_H h,\, 1_N n) = (h,\, n)
\end{aligned}$$

だからである．ここで，H の元 h に対して，

$$1_N^h = (1_N 1_N)^h = 1_N^h 1_N^h \Longrightarrow 1_N = 1_N^h$$

であることに注意する．

$(h,\, n)$ の逆元は $(h^{-1},\, (n^{h^{-1}})^{-1})$ である．実際，

$$\begin{aligned}
(h,\, n)(h^{-1},\, (n^{h^{-1}})^{-1}) &= (hh^{-1},\, n^{h^{-1}} (n^{h^{-1}})^{-1}) = (1_H,\, 1_N),\\
(h^{-1},\, (n^{h^{-1}})^{-1})(h,\, n) &= (hh^{-1},\, \bigl((n^{h^{-1}})^{-1}\bigr)^h n) = (1_H,\, \bigl((n^{-1})^{h^{-1}}\bigr)^h n)\\
&= (1_H,\, (n^{-1})^{h^{-1} h} n) = (1_H,\, n^{-1} n)\\
&= (1_H,\, 1_N).
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
n^{h^{-1}} (n^{-1})^{h^{-1}} &= (nn^{-1})^{h^{-1}} = 1_N^{h^{-1}} = 1_N,\\
(n^{-1})^{h^{-1}} n^{h^{-1}} &= (n^{-1} n)^{h^{-1}} = 1_N^{h^{-1}} = 1_N
\end{aligned}$$

より，$(n^{h^{-1}})^{-1} = (n^{-1})^{h^{-1}}$ であることに注意する．

以上より，$H \times N$ が上に述べた積に関して群をなすことが示された．　□

注意 1.2. θ が自明な作用，すなわち，

$$h \in H,\, n \in N \Longrightarrow n^h = n$$

のとき，半直積 $H \ltimes N$ は H と N の外部直積になる．

例 1. $H = \langle \sigma \rangle$ を位数 2 の群とし，$N = \langle \tau \rangle$ を位数 n の巡回群とする．H から N への作用 θ を

$$(\tau^k)^\sigma = \tau^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

によって定める．このとき，θ によって作られる半直積 $H \ltimes N$ は正 2 面体群 D_{2n} に同型である．D_{2n} は，平面上の正 n 角形を，回転や裏返しによって自分自身にうつす運動の全体からなる群である．

定理 1.3. H, N を群とし，H の N への作用 θ が与えられているとする．このとき，写像

$$\begin{aligned}
\gamma &: H \longrightarrow H \ltimes N, \qquad h \longmapsto (h,\, 1_N), \\
\eta &: N \longrightarrow H \ltimes N, \qquad n \longmapsto (1_H,\, n)
\end{aligned}$$

は単射準同型である．

したがって，γ, η によって H, N を半直積 $H \ltimes N$ の部分群とみなすことができる．

証明.

$$\begin{aligned}
\gamma(h_1h_2) &= (h_1h_2,\, 1_N) = (h_1,\, 1_N)(h_2,\, 1_N) = \gamma(h_1)\gamma(h_2), \\
\eta(n_1n_2) &= (1_H,\, n_1n_2) = (1_H,\, n_1^{1_H}n_2) = (1_H,\, n_1)(1_H,\, n_2) = \eta(n_1)\eta(n_2)
\end{aligned}$$

より γ, η は準同型である．また，

$$\begin{aligned}
\gamma(h) = (1_H,\, 1_N) &\Longrightarrow (h,\, 1_N) = (1_H,\, 1_N) \Longrightarrow h = 1_H, \\
\eta(h) = (1_H,\, 1_N) &\Longrightarrow (1_H,\, n) = (1_H,\, 1_N) \Longrightarrow n = 1_N
\end{aligned}$$

より γ, η は単射である． □

定理 1.4. H, N を群とし，H の N への作用 θ が与えられているとする．γ, η を定理 1.3 で定めた単射準同型とする．このとき，

(i) $\eta(N) \lhd H \ltimes N$

(ii) $H \ltimes N = \gamma(H)\eta(N)$

(iii) $\gamma(H) \cap \eta(N) = \{1_{H \ltimes N}\}$

が成り立つ．

証明. $H \ltimes N$ の元 $(h,\, n_1)$ と $\eta(N)$ の元 $(1_H,\, n_2)$ に対して，

$$\begin{aligned}
(h,\, n_1)(1_H,\, n_2)(h,\, n_1)^{-1} &= (h,\, n_1n_2)(h^{-1},\, (n_1^{h^{-1}})^{-1}) \\
&= (1_H,\, (n_1n_2)^{h^{-1}}(n_1^{h^{-1}})^{-1}) \in \eta(N)
\end{aligned}$$

であるから，$\eta(N)$ は $H \ltimes N$ の正規部分群である．

$(h,\,n)$ を $H \ltimes N$ の元とすれば，

$$(h,\,n) = (h1_H, 1_N n) = (h1_H,\, 1_N^{1_H} n) = (h,\,1_H)(n,\,1_N) = \gamma(h)\eta(n).$$

したがって，$H \ltimes N = \gamma(H)\eta(N)$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}(h,\,n) \in \gamma(H) \cap \eta(N) &\Longrightarrow (h,\,n) = (h_1,\,1_N) = (1_H,\,n_1)\ (\exists h_1 \in H, \exists n_1 \in N)\\ &\Longrightarrow h_1 = 1_H,\, n_1 = 1_N\end{aligned}$$

であるから，$\gamma(H) \cap \eta(N) = \{1_{H \ltimes N}\}$ である． □

群 G の二つの部分群 $H,\,N$ があって，条件

(i) $N \lhd G$

(ii) $G = HN$

(iii) $H \cap N = \{1\}$

を満たしているとき，G を H と N の**半直積**という．

$H,\,N$ を群とし，H の N への作用 θ が与えられているとする．このとき，θ によって作られる半直積 $H \ltimes N$ は，$\gamma(H)$ と $\eta(N)$ の半直積である (定理 1.4).

例 2. 3 次対称群 S_3 において，

$$H = \{1,\,(1\,2)\}, \qquad N = \{1,\,(1\,2\,3),\,(1\,3\,2)\}$$

とすれば，

$$N \lhd S_3, \qquad S_3 = HN, \qquad H \cap N = \{1\}$$

となる．よって S_3 は H と N の半直積である．

注意 1.5. 半直積の定義は $H,\,K$ に関して対称ではない．例えば，例 2 において H と N を入れ替えて，

$$H = \{1,\,(1\,2\,3),\,(1\,3\,2)\}, \qquad N = \{1,\,(1\,2)\}$$

とすると，$H \lhd S_3,\, H \cap N = \{1\}$ である．しかしながら，

$$HN = \{1,\,(1\,2),\,(1\,2\,3),\,(1\,3\,2)\}.$$

このとき，

$$(1\,2)(1\,2\,3) = (2\,3) \notin HN$$

となり，S_3 の積について閉じていないので，HN は S_3 の部分群ではない．

定理 1.6. 群 G が部分群 H と N の半直積であると仮定する．すなわち，

$$H \lhd G, \qquad G = HN, \qquad H \cap N = \{1\}.$$

写像

$$\theta : H \times N \longrightarrow N, \qquad (h,\,n) \longmapsto n^h = hnh^{-1}$$

は H の N への作用である．θ によって作られる半直積 $H \ltimes N$ は G と同型である．

証明．　H の元 $h_1,\, h_2$ と N の元 n に対して，

$$\begin{aligned}\theta(1,\, n) &= 1n1^{-1} = n,\\ \theta(h_1h_2,\, n) &= (h_1h_2)n(h_1h_2)^{-1} = (h_1h_2)n(h_2^{-1}h_1^{-1})\\ &= h_1(h_2nh_2^{-1})h_1^{-1} = \theta(h_1,\, h_2nh_2^{-1})\\ &= \theta(h_1,\, \theta(h_2,\, n)).\end{aligned}$$

ここで，$N \lhd G$ より，$h_2nh_2^{-1} \in N$ であることに注意する．よって θ は H の N への作用である．
　半直積 $H \ltimes N$ は定義によって，組 $(h,\, n)$ $(h \in H,\, n \in N)$ の全体である．写像 f を

$$f : H \ltimes N \longrightarrow G, \qquad (h,\, n) \longmapsto hn$$

によって定義する．$G = HN$ だから，f は全射である．
　H の元 $h_1,\, h_2$ と N の元 $n_1,\, n_2$ に対して，$H \ltimes N$ における積の定義から，

$$(h_1,\, n_1)(h_2,\, n_2) = (h_1h_2,\, n_1^{h_2}n_2)$$

が成り立つ．また，群 G 群の中では，

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = h_1h_2(h_2^{-1}n_1h_2)n_2 = (h_1h_2)(n_1^{h_2}n_2)$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned}f((h_1,\, n_1)(h_2,\, n_2)) &= (h_1h_2)(n_1^{h_2}n_2) = (h_1n_1)(h_2n_2)\\ &= f((h_1,\, n_1))f((h_2,\, n_2))\end{aligned}$$

となって，f は準同型である．

$$(h,\, n) \in \mathrm{Ker}\, f \Longrightarrow hn = 1 \Longrightarrow h = n^{-1} \in H \cap N = \{1\} \Longrightarrow h = n = 1.$$

ゆえに，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は $H \ltimes N$ の単位元のみからなる．すなわち f は単射である．
　以上より，f は同型写像である．　□

定理 1.7.　群の短完全系列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

に対して，単射準同型 $\iota : H \longrightarrow G$ で，

$$\pi \circ \iota = id_H$$

を満たすものが存在すると仮定する．このとき G は $\iota(H)$ と $\varphi(N)$ の半直積になる．

証明．　一般に，準同型写像の核は正規部分群である．したがって $\mathrm{Ker}\, \pi$ は G の正規部分群である．
　G の元 x に対して，

$$y = \iota(\pi(x))^{-1}x$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\pi(y) &= \pi(\iota(\pi(x))^{-1}x) = \pi(\iota(\pi(x))^{-1})\pi(x)\\ &= \pi(\iota(\pi(x)))^{-1}\pi(x) = \pi(x)^{-1}\pi(x)\\ &= 1.\end{aligned}$$

ゆえに $y \in \mathrm{Ker}\,\pi$．したがって，

$$x = \iota(\pi(x))y \in \iota(H) \cdot \mathrm{Ker}\,\pi.$$

よって，

$$G = \iota(H) \cdot \mathrm{Ker}\,\pi$$

を得る．

また，x を $\iota(H) \cap \mathrm{Ker}\,\pi$ の元とすると，H の元 y が存在して，$x = \iota(y)$ と書ける．このとき，

$$y = \pi(\iota(y)) = \pi(x) = 1 \Longrightarrow x = \iota(1) = 1.$$

したがって，

$$\iota(H) \cap \mathrm{Ker}\,\pi = \{1\}$$

となる．

$\mathrm{Ker}\,\pi = \varphi(N)$ なので，

$$\varphi(N) \lhd G, \qquad G = \iota(H) \cdot \varphi(N), \qquad \iota(H) \cap \varphi(N) = \{1\}.$$

よって，G は $\iota(H)$ と $\varphi(N)$ の半直積である．　$\square$