1 加群

R を環とします.

定義 1.1. 加法群 M が R 上の**左加群** (left module) であるとは，写像

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (a,\, x) \longmapsto ax$$

が存在して，任意の $a,\, b \in R,\, x,\, y \in M$ に対して,

(M1) $1x = x$,

(M2) $a(bx) = (ab)x$,

(M3) $(a + b)x = ax + bx$,

(M4) $a(x + y) = ax + ay$

が成り立つことをいう.

加法群 M が環 R 上の左加群であるとき，R を M の**係数環** (ring of scalar)，R の元を**スカラー** (scalar)，$R \times M \longrightarrow M$ を**スカラー乗法** (scalar multiplication)，ax を x の**スカラー倍** (scalar multiple) と呼ぶ.

定義 1.2. 加法群 M が R 上の**右加群** (right module) であるとは，写像

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (a,\, x) \longmapsto xa$$

が存在して，任意の $a,\, b \in R,\, x,\, y \in M$ に対して,

(M1′) $x1 = x$,

(M2′) $(xb)a = x(ba)$,

(M3′) $x(a + b) = xa + xb$,

(M4′) $(x + y)a = xa + ya$

が成り立つことをいう.

加法群 M が環 R 上の右加群であるときも，R を M の係数環，R の元をスカラー，$R \times M \longrightarrow M$ をスカラー乗法，xa を x のスカラー倍という.

命題 1.3. R を可換環とする.

(i) M を R 上の左加群とする．このとき

$$xa := ax \quad (a \in R,\, x \in M)$$

と定義すれば，M は R 上の右加群になる.

(ii) M を R 上の右加群とする．このとき

$$ax := xa \quad (a \in R,\ x \in M)$$

と定義すれば，M は R 上の左加群になる．

注意 1.4. 上の命題により，R が可換環である場合には，左加群と右加群との間に本質的な違いはない．よって，可換環 R 上の左加群 (および右加群) のことを単に R 上の**加群** (module) という．

注意 1.5. R が非可換環のとき，条件 (M2) と (M2′) との間に本質的な違いがある．けれどもほとんどの場合，左加群についての定理や命題に多少の修正を行えば，右加群についての定理や命題が得られる．また，その逆のこともいえる．よって以後，主に左 R 加群についての定義や命題を述べる．

定義 1.6. Q, R を環とする．加法群 M が (Q, R) 両側加群 ((Q, R)-bimodule) であるとは，次の三つの条件が成り立つことをいう：

(M1″) M は Q 上の左加群である．

(M2″) M は R 上の右加群である．

(M3″) 任意の $x \in M,\ a \in Q,\ b \in R$ に対して，$a(xb) = (ax)b$ が成り立つ．

定義 1.7. 0 だけからなる加法群 $\{0\}$ を，スカラー乗法を零写像によって定義することにより，R 上の左加群および右加群にしたものを**零加群**と呼ぶ．

例 1.8. 加法群 M は，$n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$nx := (\mathrm{sgn}\, n)(x + \cdots + x) \quad (|n| \text{ 個の和})$$

と定めることにより，$\mathbb{Z}$ 上の加群とみなすことができる．ただし $\mathrm{sgn}\, n$ は n の符号である．

例 1.9. 可換環 R は，スカラー乗法を通常の乗法で定義すれば，R 自身が R 加群になる．

例 1.10. 環 R は，スカラー乗法を通常の乗法で定義すれば，(R, R) 両側加群になる．

定義 1.11. 体 K 上の加群を K 上の**線型空間** (vector space) という．

定義 1.12. R 上の左加群 M において，M の元 x が**可除元** (divisible element) であるとは，R の零因子ではない任意の元 a に対して，ある $y \in M$ が存在して $x = ay$ と表されることをいう．

すべての元が可除元であるような R 上の左加群を**可除加群** (divisible module) と呼ぶ．

2　準同型

R を環とします.

定義 2.1.　R 上の左加群 M, N に対して，写像 $f : M \longrightarrow N$ が R 上の**準同型** (homomorphism) であるとは，任意の $x, y \in M$, $a \in R$ に対して

(i)　$f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(ii)　$f(ax) = af(x)$

が成り立つことをいう.

定義 2.2.　R 上の左加群 M, N に対して，写像 $f : M \longrightarrow N$ が R 上の**同型** (isomorphism) であるとは，次の三つの条件が成り立つことをいう：

(i)　f は全単射である.

(ii)　f は R 上の準同型である.

(iii)　f^{-1} は R 上の準同型である.

M から N への同型が存在するとき，M は N に**同型** (isomorphic) であるといい，このことを $M \simeq N$ で表す.

命題 2.3.　R 上の左加群 M, N に対して，写像 $f : M \longrightarrow N$ が全単射かつ R 上の準同型ならば，逆写像 f^{-1} もまた R 上の準同型である．すなわち，f が R 上の同型であるための必要十分条件は，f が全単射かつ R 上の準同型であることである.

3　部分加群

R を環とします.

定義 3.1.　R 上の左加群 M, N に対して，単射準同型 $\iota : N \longrightarrow M$ が存在するとき，(N, ι) を M の R 上の**部分加群** (submodule) と呼ぶ.

命題 3.2.　M を R 上の左加群とし，N を M の部分集合とする．三つの条件

- $N \neq \phi$,
- $x, y \in N \Longrightarrow x - y \in N$,
- $a \in R, x \in N \Longrightarrow ax \in N$

が成り立っているとする．さらに，単射

$$\iota : N \longrightarrow M, \quad x \longmapsto x$$

を考える．このとき (N, ι) は M の R 上の部分加群である．

注意 3.3. M, N を R 上の左加群とする．N が M の部分集合であって，単射

$$\iota : N \longrightarrow M, \quad x \longmapsto x$$

によって (N, ι) が M の R 上の部分加群になっているとき，ι を省略して,「N は M の部分加群である」という言い方をする[1].

例 3.4.

(i) R の部分集合 $\mathfrak{a}$ が R の左イデアルであるための必要十分条件は，R 自身を R 上の左加群とみたとき，$\mathfrak{a}$ が R の部分加群となることである．

(ii) R の部分集合 $\mathfrak{a}$ が R の右イデアルであるための必要十分条件は，R 自身を R 上の右加群とみたとき，$\mathfrak{a}$ が R の部分加群となることである．

(iii) R の部分集合 $\mathfrak{a}$ が R の両側イデアルであるための必要十分条件は，R 自身を (R, R) 両側加群とみたとき，$\mathfrak{a}$ が右 R 加群としても左 R 加群としても R の部分加群となることである．

命題 3.5. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．M_1 を M の部分加群とするとき，$f(M_1)$ は M の部分加群である．

定義 3.6. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．このとき $f(M)$ を f の**像** (image) と呼び，$\mathrm{Im}\, f$ と書く．

命題 3.7. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．N_1 を N の部分加群とするとき，$f^{-1}(N_1)$ は M の部分加群である．

系 3.7.1. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．このとき，

$$\mathrm{Ker}\, f := f^{-1}(0) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

は M の部分加群である．

定義 3.8. $\mathrm{Ker}\, f$ を f の**核** (kernel) と呼ぶ.

[1]むしろ，R 上の左加群の部分集合に対して，部分加群という言葉を定義するのが普通である．

4　生成される部分加群

R を環とし，M を R 上の左加群とします．
M_1, M_2 を M の部分集合とするとき，

$$M_1 + M_2 := \{x_1 + x_2 \mid x \in M_1,\, y \in M_2\}$$

とおきます．また，S を M の部分集合とするとき，

$$RS := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; a_i \in R,\, x_i \in S,\; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

とおきます．特に $S = \{x\}$ のとき，RS を Rx と書きます．

命題 4.1.　S を M の部分集合とするとき，RS は S を含む M の部分加群のうちで包含関係について最小のものである．

系 4.1.1.　S を含む M の部分加群の全体からなる集合系を $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ とする．このとき

$$RS = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

が成り立つ．

定義 4.2.　RS を S **によって生成される** (generated by S) M の部分加群という．M の部分加群 N に対して，ある M の部分集合 S が存在して $N = RS$ となるとき，N は S **によって生成される**という．特に S として有限集合がとれるとき，N は**有限生成** (finitely generated) であるという．

命題 4.3.　M の部分集合 S に対して，$RS = \sum_{x \in S} Rx$ が成り立つ．

M の部分加群からなる系 $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ に対して，

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_{\lambda_i} \;\middle|\; x_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i},\, \lambda_i \in \Lambda,\, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

とおきます．

命題 4.4.　M の部分加群からなる系 $(N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ に対して，$\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = R\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\right)$ が成り立つ．

5　剰余加群

R を環とします．

定義 5.1. R 上の左加群 M, N に対して，全射準同型 $\pi : M \longrightarrow N$ が存在するとき，(N, π) を M の**剰余加群** (quotient module) という．

例 5.2. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．このとき $(f(M), f)$ は M の剰余加群である．

M を R 上の左加群とし，N を M の部分加群とします．M の元 x, y に対して，$x - y \in N$ であることを

$$x \equiv y \pmod N$$

と書くことにします．$\equiv$ は同値関係になります．この同値関係によって M を類別したとき，M の元 x を代表元とする同値類を $x \bmod N$ と書くことにします．そして，同値類の全体を M/N で表します：

$$M/N := \{x \bmod N \mid x \in M\}.$$

M/N における和とスカラー倍をそれぞれ

$$x \bmod N + y \bmod N := x + y \bmod N,$$
$$a(x \bmod N) := ax \bmod N$$

によって定義します．ただし $x, y \in M$, $a \in R$ です．この定義は同値類の代表元の取り方には依存しません．これらの和，スカラー倍によって，M/N は R 上の左加群になります．さらに，全射準同型

$$\pi : M \longrightarrow M/N, \quad x \longmapsto x \bmod N$$

が定まります.

命題 5.3. $(M/N, \pi)$ は M の剰余加群である．

定義 5.4. $(M/N, \pi)$ を，**部分加群** N **による** M **の剰余加群**という．また，π をこの剰余加群の**自然な準同型** (canonical homomorphism) と呼ぶ.

注意 5.5. $(M/N, \pi)$ が部分加群 N による M の剰余加群であるとき，π を省略して,「M/N は M の剰余加群である」という言い方をする．

例 5.6. 加法群 M を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたとき，正規部分群 N による剰余群 M/N は $\mathbb{Z}$ 上の加群になる．

例 5.7.

(i) R 自身を R 上の左加群とみたとき，左イデアル $\mathfrak{a}$ による剰余環 $R/\mathfrak{a}$ は R 上の左加群になる．

(ii) R 自身を R 上の右加群とみたとき，右イデアル $\mathfrak{a}$ による剰余環 $R/\mathfrak{a}$ は R 上の右加群になる．

(iii) R 自身を (R, R) 両側加群とみたとき，両側イデアル $\mathfrak{a}$ による剰余環 $R/\mathfrak{a}$ は (R, R) 両側加群になる．

定理 5.8 (準同型定理). M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を R 上の準同型とする．このとき，写像

$$M/\mathrm{Ker}\, f \longrightarrow f(M), \quad x \bmod \mathrm{Ker}\, f \longmapsto f(x)$$

は同型である．

定理 5.9 (第一同型定理). M, M' を R 上の左加群，N' を M' の部分加群，$N := f^{-1}(N')$ とする．このとき

$$G/N \longrightarrow G'/N', \quad x \bmod N \longmapsto x \bmod N'$$

は同型である．

定理 5.10 (第二同型定理). M を R 上の左加群とし，N_1, N_2 を M の部分加群とする．このとき

$$N_1/(N_1 \cap N_2) \longrightarrow (N_1 + N_2)/N_2, \quad x \bmod N_1 \cap N_2 \longmapsto x \bmod N_2$$

は同型である．

定理 5.11 (第三同型定理). M を R 上の左加群，N_1, N_2 を M の部分加群とし，$N_1 \subseteq N_2$ とする．このとき

$$M/N_1 \longrightarrow (M/N_2)/(N_1/N_2), \quad x \bmod N_1 \longmapsto (x \bmod N_2) \bmod N_1/N_2$$

は同型である．

定義 5.12. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を準同型とする．このとき N の $f(M)$ による剰余加群

$$\mathrm{Coker}\, f := N/f(M)$$

を f の**余核** (cokernel) と呼ぶ．

定義 5.13. M, N を R 上の左加群とし，$f : M \longrightarrow N$ を準同型とする．このとき M の $\mathrm{Ker}\, f$ による剰余加群

$$\mathrm{Coim}\, f := M/\mathrm{Ker}\, f$$

を f の**余像** (coimage) と呼ぶ．

6 直積・直和

R を環とします．

R 上の左加群の系 $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ に対して，直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を考えます．$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ における和とスカラー倍を

$$\begin{aligned}(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) + (y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) &= (x_\lambda + y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda),\\ a\,(x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) &= (ax_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \quad (a \in R)\end{aligned}$$

によって定義すると，$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は R 上の左加群になります．

定義 6.1. $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ の**直積** (direct product) と呼ぶ．

さらに，加法群としての直和

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{ (x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \;\middle|\; \text{有限個の } \lambda \text{ を除いて } x_\lambda = 0 \right\}$$

は $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の部分加群になります．

定義 6.2. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ の**直和** (direct sum) と呼ぶ．

注意 6.3. Λ が有限集合のとき，直積と直和とは一致する．

命題 6.4. R 上の左加群 M の有限個の部分加群 $M_1,\,\ldots,\,M_n$ に対して，次の四つの条件は同値である：

(i) 写像

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \sum_{i=1}^n M_i, \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \cdots + x_n$$

は同型である．

(ii) $\sum_{i=1}^n M_i$ の任意の元は $x_1 + \cdots + x_n$ $(x_i \in M_i)$ の形に一意的に表される．

(iii) $x_1 + \cdots + x_n = 0$ $(x_i \in M_i) \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$.

(iv) $(M_1 + \cdots + M_i) \cap M_{i+1} = 0$ $(i = 1,\,2,\,\ldots,\,n-1)$.

定義 6.5. R 上の左加群 M の部分加群 $(N,\,\iota)$ が M の**直和因子** (direct summand) であるとは，ある M の部分加群 $(N',\,\iota')$ が存在して $M \simeq N \oplus N'$ が成り立つことをいう．

定義 6.6. R 上の左加群 M が**直既約** (indecomposable) であるとは，M の部分加群 $(M_1,\,\iota_1)$ と $(M_2,\,\iota_2)$ について

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \Longrightarrow M_1 = \{0\} \text{ または } M_2 = \{0\}$$

が成り立つことをいう．

7　自由加群

R を環とします．

定義 7.1.　M を R 上の左加群とする．M の有限部分集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ が R 上**一次独立** (linearly independent) であるとは，任意の $a_1, \ldots, a_n \in R^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成り立つことをいう．空集合は一次独立であると定める．

命題 7.2.　R 上の左加群 M の有限部分集合 S が R 上一次独立ならば，S の任意の部分集合もまた R 上一次独立である．

定義 7.3.　R 上の左加群 M の無限部分集合 S が R 上**一次独立**であるとは，S の任意の有限部分集合が R 上一次独立であることをいう．

定義 7.4.　R 上の左加群 M の部分集合 S が R 上一次独立ではないとき，S は R 上**一次従属** (linearly dependent) であるという．

定義 7.5.　R 上の左加群 M の元 x が**自由元** (free element) であるとは，任意の $a \in R$ に対して

$$ax = 0 \Longrightarrow a = 0$$

が成り立つことをいう．逆に，自由元ではない M の元を**捩れ元** (torsion element) と呼ぶ．

命題 7.6.　R 上の左加群 M の元 x について

$$x \text{ が自由元} \Longleftrightarrow \{x\} \text{ が } R \text{ 上一次独立}$$

が成り立つ．

例 7.7.　加法群 M を $\mathbb{Z}$ 上の加群と考えるとき，M の元 x について

$$x \text{ が自由元} \Longleftrightarrow x \text{ の位数は無限.}$$

定義 7.8.　M を R 上の左加群とする．M のすべての元が捩れ元であるとき，M を**捩れ加群** (torsion module) と呼ぶ．一方，M の 0 以外のすべての元が自由元であるとき，M を**捩れのない加群** (torsion-free module) と呼ぶ．

定義 7.9. R 上の左加群 M が，ある一次独立な部分集合 B によって生成されるとき，M を R 上の**自由加群** (free module) と呼び，B を M の**基底** (basis) と呼ぶ．

例 7.10. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ は R 上の自由加群である．$(\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ なる形の元の全体が一つの基底になる．

命題 7.11. M を R 上の自由加群とし，$B = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の R 上の基底とする．このとき，写像

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R \longrightarrow M, \qquad (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \longmapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda$$

は同型である．

命題 7.12. 自由加群において，ある一つの基底の濃度が無限ならば，基底の濃度は一定である．

命題 7.13. 可換環上の自由加群の基底の濃度は一定である．

注意 7.14. 非可換環上の自由加群の基底の濃度は，有限のとき，必ずしも一定であるとは限らない．

定義 7.15. 可換環 R 上の自由加群 M について，その基底の濃度を M の**階数** (rank) と呼び，$\operatorname{rank} M$ で表す．

命題 7.16. 体 K 上の線型空間は自由加群である．すなわち，線型空間には必ず基底が存在する．

定義 7.17. 体 K 上の線型空間 V の階数を**次元** (dimension) と呼び，$\dim V$ で表す．

8　集合を基底として生成される自由加群

A を集合とし，R を環とします．$\operatorname{Map}(A, R)$ を A から R への写像全体とします．
$f, g \in \operatorname{Map}(A, R)$ に対して，和 $f + g$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in A)$$

によって定義します．また，$f \in \operatorname{Map}(A, R)$ と $\alpha \in R$ に対して，スカラー倍 αf を

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in A)$$

によって定義します．このように定義した和とスカラー倍とによって，$\operatorname{Map}(A, R)$ は R 上の左加群になります．

さて，$f \in \operatorname{Map}(A, R)$ で，有限個の $x \in A$ を除いて $f(x) = 0$ となるもの全体を $R[A]$ とおきます．

命題 8.1. $R[A]$ は $\mathrm{Map}(A, R)$ の部分加群になる．

$a \in A$ に対して，写像 $e(a) : A \longrightarrow R$ を

$$e(a)(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \text{ のとき} \\ 1, & x = a \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義します．このとき，単射

$$e : A \longrightarrow R[A], \quad x \longmapsto e(x)$$

が定まります.

命題 8.2. $\{e(x) \mid x \in A\}$ は $R[A]$ の基底である．

定義 8.3. $R[A]$ を**集合 A を基底として生成される自由加群**と呼ぶ.

注意 8.4. R 上の右加群および (R, R) 両側加群に対しても，同様にして A を基底として生成される自由加群を定義することができる．

e は単射なので，集合として A と $\{e(x) \mid x \in A\}$ とを同一視して，$e(x)$ を単に x と書くことにします．そうすれば $R[A]$ のすべての元 f は

$$f = \sum_{x \in A} a_x x, \quad a_x \in R$$

の形で一意的に表すことができます.

9 双対加群

R 上の左加群 M, N に対して，M から N への R 上の準同型全体を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ で表します. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ における和を，$f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ に対して

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in M)$$

によって定義します．この和によって $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は加法群になります．加法における単位元は零写像です.

定義 9.1. M を R 上の左加群とする．M から M 自身への準同型を M の**自己準同型** (endomorphism) と呼び，M の自己準同型の全体 $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ を $\mathrm{End}_R M$ と書く.

定義 9.2. R 上の左加群 M に対して，準同型 $f : M \longrightarrow R$ を M 上の**線型形式** (linear form) と呼ぶ.

M を R 上の左加群とします．M 上の線型形式の全体 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ は，スカラー倍を

$$(fa)(x) := f(x)a \quad (a \in R,\, f \in \mathrm{Hom}_R(M, R),\, x \in M)$$

と定義することによって R 上の右加群になります．

逆に，M を R 上の右加群とすれば，スカラー倍を

$$(af)(x) := af(x) \quad (a \in R,\, f \in \mathrm{Hom}_R(M, R),\, x \in M)$$

と定義することによって $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ は R 上の左加群になります．

定義 9.3. R 上の左加群 M に対して，R 上の右加群 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ を M の**双対加群** (dual module) といい，M^* で表す．逆に，R 上の右加群 M 群に対して，R 上の左加群 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ を M の**双対加群**といい，同じく M^* で表す．

命題 9.4. R 上の左加群 M に対して，写像 $\Phi : M \longrightarrow M^{**}$ を

$$(\Phi(x))(f) := f(x) \quad (f \in M^*,\, x \in M)$$

により定義すれば，Φ は同型である．右加群についても同様である．

10　テンソル積

R を環とし，M を R 上の右加群，N を R 上の左加群とします．

定義 10.1. G を加法群とする．写像

$$\varphi : M \times N \longrightarrow G$$

が R 上の**平衡写像** (balanced mapping) であるとは，条件

(i) $\varphi(x + y,\, z) = \varphi(x,\, z) + \varphi(y,\, z)$,

(ii) $\varphi(x,\, z + w) = \varphi(x,\, z) + \varphi(x,\, w)$,

(iii) $\varphi(xa,\, z) = \varphi(x,\, az)$

が成り立つことをいう．ただし $x, y \in M$, $z, w \in N$, $a \in R$ とする．

定義 10.2. M, N に対して，次の条件 (T) を満たす加法群 T と R 上の平衡写像との組 (T, τ) を M と N との**テンソル積** (tensor product) と呼ぶ：

(T) 任意の加法群 G と R 上の平衡写像 $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ に対して，加法群の準同型 $F : T \longrightarrow G$ がただ一つ存在して，$\varphi = F \circ \tau$ を満たす．

τ をテンソル積 (T, τ) の**標準写像** (canonical mapping) と呼ぶ．

条件 (T) はテンソル積の**普遍性** (universality) と呼ばれる．

(T, τ) が M と N とのテンソル積であるとき，T を $M \otimes_R N$ と書く．また，$x \in M$, $y \in N$ に対して $\tau(x, y)$ を $x \otimes y$ と書く．

注意 10.3.　$M \otimes_R N$ のことを V と W とのテンソル積ということもある．また，$x \otimes y$ を x と y とのテンソル積ということもある．

命題 10.4.　加法群 T と R 上の平衡写像 $\tau : M \times N \longrightarrow T$ との組 (T, τ) について，次の二つの命題 (i), (ii) は同値である：

(i)　(T, τ) は次の二つの条件 (T_1), (T_2) を満たす：

(T_1)　任意の加法群 G と R 上の平衡写像 $\varphi : M \times N \longrightarrow G$ に対して，加法群の準同型 $F : T \longrightarrow G$ が存在して，$\varphi = F \circ \tau$ を満たす．

(T_2)　T は $\tau(M \times N)$ によって生成される．

(ii)　(T, τ) は次の条件 (T) を満たす：

(T)　任意の加法群 G と R 上の平衡写像 $\varphi : M \times N \longrightarrow T'$ に対して，加法群の準同型 $F : T \longrightarrow G$ がただ一つ存在して，$\varphi = F \circ \tau$ を満たす．

系 10.4.1.　M と N とのテンソル積 $M \otimes_R N$ は $\{x \otimes y \mid x \in M,\, y \in N\}$ によって生成される．

$\mathbb{Z}[M \times N]$ を，$M \times N$ を基底として生成される $\mathbb{Z}$ 上の加群とします．
次の三つの形の元全体で生成される $\mathbb{Z}[M \times N]$ の部分加群を X とします：

- $(x,\, y) + (x',\, y) - (x + x',\, y)$,
- $(x,\, y) + (x,\, y') - (x,\, y + y')$,
- $(ax,\, y) - (x, ay)$,

ただし，$x,\, x' \in V,\, y,\, y' \in W,\, a \in R$ とします．
$\mathbb{Z}[M \times N]$ の X による剰余加群 $\mathbb{Z}[M \times N]/X$ を考え，それを T とおきます．$\pi : \mathbb{Z}[M \times N] \longrightarrow T$ を自然な全射準同型とし，π の $M \times N$ への制限を τ とおきます．すなわち

$$\tau : M \times N \longrightarrow T, \quad (x,\, y) \longmapsto (x,\, y) \bmod X.$$

命題 10.5.　上のように定義した τ は R 上の平衡写像であり，組 (T, τ) は M と N とのテンソル積である．

注意 10.6.　M と N との二つのテンソル積 (T, τ), (T', τ') が条件

(U)　加法群の同型写像 $F : T \longrightarrow T'$ で，$F \circ \tau = \tau'$ となるものが存在する．

を満たすとき，(T, τ) と (T', τ') とはテンソル積として同一であると考える．

命題 10.7.　(T, τ) を M と N とのテンソル積とする．加法群 T' と R 上の平衡写像 $\tau' : M \times N \longrightarrow T'$ との組 (T', τ') が条件 (U) を満たすならば，(T', τ') も M と N とのテンソル積である．

定理 10.8 (テンソル積の一意性). M と N とのテンソル積 (T, τ), (T', τ') に対して，加法群の同型 $F : T \longrightarrow T'$ で $F \circ \tau = \tau'$ となるものがただ一つ存在する．すなわち，M と N とのテンソル積は一意的である．

命題 10.9.

(i) $M \otimes_R R \simeq M, \quad x \otimes a \longmapsto xa.$

(ii) $R \otimes_R N \simeq N, \quad a \otimes x \longmapsto ax.$

命題 10.10.

(i) $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \otimes_R N \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda \otimes_R N).$

(ii) $M \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (M \otimes_R N_\lambda).$

命題 10.11. f_1, f_2 に対して，$M_1 \otimes M_2$ から $N_1 \otimes N_2$ への加法群の準同型 $\widetilde{f}$ で

$$\widetilde{f}(x_1 \otimes x_2) = f_1(x_1) \otimes f_2(x_2) \quad (\forall x_1 \in M_1, \forall x_2 \in M_2)$$

を満たすものがただ一つ存在する．

定義 10.12. 上の命題の $\widetilde{f}$ を f_1 と f_2 との**テンソル積**といい，$f_1 \otimes f_2$ と書く．

11 図式と系列

R を環とします．

$$\mathcal{M} := \{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, \quad \mathcal{N} := \{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

を R 上の左加群からなる集合族とし，

$$\mathcal{F} := \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

を準同型からなる集合族とします．このとき，写像

$$\Delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \quad f_\lambda \longmapsto (M_\lambda, N_\lambda)$$

が定まります．

定義 11.1. Δ を**図式** (diagram) と呼ぶ．特に，$\Lambda = \mathbb{Z}$ であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $N_\lambda = M_{\lambda+1}$ が成り立つとき，図式 Δ を**系列** (sequence) と呼ぶ．

通常，図式および系列は矢印 $\longrightarrow$ を用いた図で表されます．その際，0 のみからなる環を簡単に 0 と書きます．また，有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて $M_\lambda = N_\lambda = \{0\}$ である場合，そのような M_λ, N_λ およびその間の矢印は省略されます．対象が無限個あって図に書ききれないときは「$\cdots$」を使って無限に続くことを表します．

定義 11.2. 図式 Δ が**可換** (commutative) であるとは，任意の $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ に対して，準同型 $f : M \longrightarrow N$ で $\mathcal{F}$ に属する有限個の準同型の合成で表されるものがもし存在すれば一意的であることをいう.

12 完全系列

定義 12.1. 系列

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

について，すべての $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_i(M_i) \subseteq \mathrm{Ker}\ f_{i+1}$$

が成り立つとき，この系列を**零列** (zero sequence) と呼ぶ.

定義 12.2. 系列

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

が**完全** (exact) であるとは，すべての $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_i(M_i) = \mathrm{Ker}\ f_{i+1}$$

が成り立つことをいう.

注意 12.3. 完全系列

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \cdots$$

を略して

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \cdots$$

と書く.

注意 12.4. 完全系列

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathrm{Coker}\ f \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

を略して

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

と書く.

命題 12.5.　系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \cdots$$

が完全であるための必要十分条件は，f が単射であることである．

命題 12.6.　系列

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

が完全であるための必要十分条件は，f が全射であることである．

命題 12.7.　系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

が完全であるための必要十分条件は，f が全単射であることである．

定義 12.8.　系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，この系列を**短完全系列** (short exact sequence) と呼ぶ．

命題 12.9.　短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

について

(i)　$L \simeq \mathrm{Ker}\, g$,

(ii)　$N \simeq \mathrm{Coker}\, f$

が成り立つ．

定理 12.10 (Five Lemma).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

を R 上の左加群の可換図式とし，上下の水平な二つの系列がともに完全であるとする．このとき，

(i)　f_1 が全射，f_2 と f_4 が単射ならば，f_3 は単射である．

(ii)　f_5 が単射，f_2 と f_4 が全射ならば，f_3 は全射である．

定理 12.11 (Snake Lemma).

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & & \end{array}$$

を R 上の左加群の可換図式とし，上下の水平な二つの系列がともに完全であるとする．このとき，ある準同型 $\delta : \mathrm{Ker}\,\gamma \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\alpha$ が存在して，系列

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\gamma \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\gamma$$

が完全になる．

命題 12.12.　短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

について，次の二つの条件は同値である：

(i)　f に対してある準同型 $s : M \longrightarrow L$ が存在して $s \circ f = \mathrm{id}_L$ が成り立つ．

(ii)　g に対してある準同型 $i : N \longrightarrow M$ が存在して $g \circ i = \mathrm{id}_N$ が成り立つ．

さらに，(i), (ii) が成り立つならば，$M \simeq L \oplus N$ が成り立つ．

定義 12.13.　短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，上の命題の条件 (i), (ii) を満たすことをいう．

13　射影加群

R を環とします．
M, N_1, N_2 を R 上の左加群とし，$\varphi : N_1 \longrightarrow N_2$ を準同型とします．このとき，加法群の準同型

$$\varphi_* : \mathrm{Hom}_R(M,\, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,\, N_2), \quad f \longmapsto \varphi \circ f$$

が定まります．

命題 13.1.　R 上の左加群 M と，R 上の左加群の完全系列

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \xrightarrow{\psi} N_3$$

に対して，加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,\, N_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_R(M,\, N_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_R(M,\, N_3)$$

は完全である．

注意 13.2. 上の命題において，仮定を強めて短完全系列

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \xrightarrow{\psi} N_3 \longrightarrow 0$$

を与えたとしても，Hom_R に関する短完全系列は得られない．

定義 13.3. R 上の左加群 M が**射影的** (projective) であるとは，任意の R 上の左加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \xrightarrow{\psi} N_3 \longrightarrow 0$$

に対して，加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_3) \longrightarrow 0$$

が完全であることをいう．射影的であるような R 上の左加群を**射影加群** (projective module) と呼ぶ．

命題 13.4. R 上の左加群 M が射影的であるための必要十分条件は，任意の全射準同型 $\pi : N_2 \longrightarrow N_3$ と準同型 $f : M \longrightarrow N_3$ に対して，準同型 $\overline{f} : M \longrightarrow N_2$ が存在して $\pi \circ \overline{f} = f$ が成り立つことである．

命題 13.5. R 上の左加群 M が射影的であるための必要十分条件は，M がある R 上の自由加群の直和因子になることである．すなわち，ある R 上の左加群 N が存在して，直和 $M \oplus N$ が R 上の自由加群になることである．

系 13.5.1. 自由加群は射影加群である．

命題 13.6. 射影加群の系 $(P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ に対して，直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ は射影加群である．

命題 13.7. R 上の左加群の直和 $M \oplus N$ が射影的ならば，M および N も射影的である．

命題 13.8. R が単項イデアル整域ならば，R 上の有限生成射影加群は自由加群である．

命題 13.9. 任意の R 上の左加群 M に対して，射影加群の系 $(P_i \mid i \in \mathbb{Z},\, i \geq 0)$ で，系列

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow \cdots$$

が完全になるものが存在する．特に，各 P_i として自由加群がとれる．

定義 13.10. 上の命題の $(P_i \mid i \in \mathbb{Z},\, i \geq 0)$ を M の**射影的分解** (projective resolution) という．

14 入射加群

R を環とします.

$M_1,\,M_2,\,N$ を R 上の左加群とし, $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ を準同型とします. このとき, 加法群の準同型

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}_R(M_2,\,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1,\,N), \quad f \longmapsto f \circ \varphi$$

が定まります.

命題 14.1. R 上の左加群 N と, R 上の左加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } M_2 \xrightarrow{\ \psi\ } M_3 \longrightarrow 0$$

に対して, 加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\,N) \xrightarrow{\ \psi^*\ } \mathrm{Hom}_R(M_2,\,N) \xrightarrow{\ \varphi^*\ } \mathrm{Hom}_R(M_1,\,N)$$

は完全である.

注意 14.2. 上の命題において, 仮定を強めて短完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } M_2 \xrightarrow{\ \psi\ } M_3 \longrightarrow 0$$

を与えたとしても, Hom_R に関する短完全系列は得られない.

定義 14.3. R 上の左加群 N が**入射的** (injective)[2]であるとは, 任意の R 上の左加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ \varphi\ } M_2 \xrightarrow{\ \psi\ } M_3 \longrightarrow 0$$

に対して, 加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\,N) \xrightarrow{\ \psi^*\ } \mathrm{Hom}_R(M_2,\,N) \xrightarrow{\ \varphi^*\ } \mathrm{Hom}_R(M_1,\,N) \longrightarrow 0$$

が完全であることをいう. 入射的であるような R 上の左加群を**入射加群** (injective module) と呼ぶ.

命題 14.4. R 上の左加群 N が入射的であるための必要十分条件は, 任意の単射準同型 $\iota : M_1 \longrightarrow M_2$ と準同型 $f : M_1 \longrightarrow N$ に対して, 準同型 $\overline{f} : M_2 \longrightarrow N$ が存在して $\overline{f} \circ \iota = f$ が成り立つことである.

命題 14.5. 任意の R 上の左加群は, ある入射加群の部分加群である.

命題 14.6. R 上の左加群 N が入射的であるための必要十分条件は, N を部分加群とする任意の R 上の左加群 M に対して, N が M の直和因子になることである.

[2]単射的, 移入的ということもあります. 英訳はいずれも injective です.

命題 14.7.　任意の R 上の左加群 N に対して，R 上の入射加群の系 $(I_i \mid i \in \mathbb{Z},\, i \geq 0)$ で，系列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots$$

が完全になるものが存在する．

定義 14.8.　上の命題の $(I_i \mid i \in \mathbb{Z},\, i \geq 0)$ を N の**入射的分解** (injective resolution) という．

15　平坦加群

R を環とします．

定理 15.1 (テンソル積の右完全性).　R 上の左加群 N と，R 上の右加群の完全系列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全である．

注意 15.2.　上の命題において，仮定を強めて短完全系列

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\psi_1} N_2 \xrightarrow{\psi_2} N_3 \longrightarrow 0$$

を与えたとしても，テンソル積に関する短完全系列は得られない．

定義 15.3.　R 上の左加群 N が**平坦** (flat) であるとは，任意の R 上の右加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，加法群を $\mathbb{Z}$ 上の加群とみたときの系列

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

が完全であることをいう．平坦であるような R 上の左加群を**平坦加群** (flat module) と呼ぶ．

命題 15.4.　R 上の左加群 N が平坦であるための必要十分条件は，任意の R 上の右加群の単射準同型 $\iota : M_1 \longrightarrow M_2$ に対して，$\iota \otimes \mathrm{id}_N : M_1 \otimes_R N \longrightarrow M_2 \otimes_R N$ が単射になることである．

命題 15.5.　R 上の左加群 N は射影的ならば平坦である．

16　半単純加群

R を環とします.

定義 16.1.　R 上の左加群 M が**単純** (simple) であるとは，もし (N, ι) が M の部分加群ならば，$N \simeq M$ または $N \simeq \{0\}$ であることをいう.

定理 16.2 (Schur の補題).　R 上の左加群 M が単純ならば，$\mathrm{End}_R M$ は斜体になる.

定義 16.3.　R 上の左加群 M が**半単純** (semi-simple) であるとは，M の任意の部分加群が M の直和因子であることをいう.

命題 16.4.　単純加群は半単純である.

命題 16.5.　半単純加群の部分加群は半単純である.

命題 16.6.　半単純加群の剰余加群は半単純である.

命題 16.7.　R 上の左加群 M が半単純であるための必要十分条件は，M が単純加群の直和に同型なことである.

命題 16.8.　次の三つの条件は同値である：

(i)　R 自身を左 R 加群とみたとき，R は半単純である.

(ii)　すべての左 R 加群は半単純である.

(iii)　すべての左 R 加群は射影的である.

17　組成列

R を環とし，M を R 上の左加群とします.

定義 17.1.　M の部分加群からなる列 $H_0, H_1, \ldots, H_n$ が**正規列** (normal chain) であるとは，次の二つの条件が成り立つことをいう：

(i)　$H_0 = \{0\}$, $H_n = M$,

(ii)　H_i は H_{i+1} の部分加群である $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

定義 17.2.　M の正規列 $K_0, K_1, \ldots, K_m$ が，M の正規列 $H_0, H_1, \ldots, H_n$ の**細分** (refinement) であるとは,

$$\{H_0, H_1, \ldots, H_n\} \subseteq \{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$$

が成り立つことをいう．$\subsetneq$ であるときの細分を**真の細分**という.

定義 17.3.　M の正規列 $\mathcal{H} : H_0, H_1, \ldots, H_n$ が条件

(i)　$H_i \neq H_{i+1}$,

(ii)　H_i/H_{i+1} は単純である．すなわち H_i/H_{i+1} 自身と零加群を除いて部分加群を持たない

を満たすとき，$\mathcal{H}$ を M の**組成列** (composition series) と呼ぶ．このとき，各剰余加群 H_i/H_{i+1} を $\mathcal{H}$ の**組成因子** (composition factor) と呼ぶ．また，n を $\mathcal{H}$ の**長さ** (length) という.

定義 17.4.　二つの正規列 $\mathcal{H} : H_0, H_1, \ldots, H_n$ と $\mathcal{K} : K_0, K_1, \ldots, K_m$ とが同型 (isomorphic) であるとは，次の二つの条件が成り立つことをいう：

(i)　$m = n$,

(ii)　$\{1, \ldots, n\}$ の置換 σ が存在して，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$H_i/H_{i-1} \simeq K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}$$

が成り立つ.

定理 17.5 (Zassenhaus の補題).　H, K を M の部分加群とし，H', K' をそれぞれ H, K の部分加群とする．このとき

$$(H' + (H \cap K))/(H' + (H \cap K')) \simeq (K' + (H \cap K))/(K' + (H' \cap K))$$

が成り立つ.

定理 17.6 (Schreier の細分定理).　二つの正規列 $\mathcal{H} : H_0, H_1, \ldots, H_n$ と $\mathcal{K} : K_0, K_1, \ldots, K_m$ が与えられたとき，$\mathcal{H}$ の細分 $\widetilde{\mathcal{H}}$ と $\mathcal{K}$ の細分 $\widetilde{\mathcal{K}}$ で，$\widetilde{\mathcal{H}}$ と $\widetilde{\mathcal{K}}$ とが正規列として同型であるものが存在する.

定理 17.7 (Jordan-Hölder の定理).　M が組成列を持つと仮定する．このとき，M の任意の二つの組成列は同型である.

系 17.7.1.　M が組成列を持てば，その長さは一定である.

18　Noether 加群

R を環とし，M を R 上の左加群とします.

定義 18.1.　次の条件を**昇鎖条件** (ascending chain condition) という：
M の任意の部分加群の増加列

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

に対して，ある番号 n が存在して $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となる.

定義 18.2.　次の条件を**極大条件** (maximal condition) という：
M の部分加群からなる空でない集合は包含関係に関して極大元を持つ.

命題 18.3.　R 上の左加群 M について，次の三つの条件は同値である：

(i)　M の部分加群はすべて有限生成である.

(ii)　M は昇鎖条件を満たす.

(iii)　M は極大条件を満たす.

定義 18.4.　M が上の命題の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき，M を **Noether 加群** (Noetherian module) と呼ぶ.

定義 18.5.　次の条件を**降鎖条件** (descending chain condition) という：
M の任意の部分加群の減少列

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

に対して，ある番号 n が存在して $M_n = M_{n+1} = \cdots$ となる.

定義 18.6.　次の条件を**極小条件** (minimal condition) という：
M の部分加群からなる空でない集合は包含関係に関して極小元を持つ.

命題 18.7.　R 上の左加群 M について，次の二つの条件は同値である：

(i)　M は降鎖条件を満たす.

(ii)　M は極小条件を満たす.

定義 18.8.　M が上の命題の条件 (i), (ii) を満たすとき，M を **Artin 加群** (Artinian module) と呼ぶ.

命題 18.9. R 上の左加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

が与えられているとする．このとき,

(i) M_2 が Noether 加群 $\Longleftrightarrow$ $M_1,\ M_3$ が Noether 加群.

(ii) M_2 が Artin 加群 $\Longleftrightarrow$ $M_1,\ M_3$ が Artin 加群.

命題 18.10. M が組成列を持つための必要十分条件は，M が Noether 加群かつ Artin 加群であることである.

参考文献

[1] 河田敬義：ホモロジー代数 I, II，岩波書店 (1976, 1977)

[2] 内田伏一：集合と位相，裳華房 (1986)

[3] 堀田良之：代数入門—群と加群—，裳華房 (1987)