この文書の全体を通じて, $\arctan(x)$ は $\tan(x)$ の逆関数を表し, 主値をとるものとする.

1 Machin の公式

[補題 1.1] $0 < x < 1$ の範囲で $0 < \arctan(x) < x$ が成り立つ.

[証明] $\arctan(0) = 0$. また, $y = \arctan(x)$ とおくと, $x = \tan(y)$ であるから,

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\tan(y)} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad (0 < x < 1).$$

ゆえに, 平均値の定理により $0 < x < 1$ で $\arctan(x) > 0$.

$f(x) = x - \arctan(x)$ とおくと, $f(0) = 0$. また,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad (0 < x < 1).$$

ゆえに, 平均値の定理により $0 < x < 1$ で $f(x) > 0$. □

[補題 1.2] $\arctan(x)$ は奇関数である.

[証明] $y = \arctan(-x)$ とおくと,

$$\tan(y) = \tan\bigl(\arctan(-x)\bigr) = -x.$$

$\tan(x)$ が奇関数であることより,

$$x = -\tan(y) = \tan(-y).$$

よって,

$$\arctan(x) = -y.$$

したがって, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ が成り立つ. □

[定理 1.3 (Machin の公式)]

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

[証明] $\tan(x+y)$ について, 加法公式

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
\tan\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan(4x) + \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan(4x)\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\tan(4x) - 1}{\tan(4x) + 1}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

また，加法公式から，2 倍角の公式

$$
\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}
$$

が得られる．さらに，x に $2x$ を代入すれば，4 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\tan(4x) &= \frac{2\tan(2x)}{1 - \tan^2(2x)} \\
&= \frac{4\tan(x)\bigl(1 - \tan^2(x)\bigr)}{1 - 6\tan^2(x) + \tan^4(x)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

$a = \arctan(1/5)$ とすると，$\tan(a) = 1/5$ である．4 倍角の公式より

$$
\tan(4a) = \frac{4\tan(a)\bigl(1 - \tan^2(a)\bigr)}{1 - 6\tan^2(a) + \tan^4(a)} = \frac{120}{119}
$$

であるから，(1) より

$$
\tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\dfrac{120}{119} - 1}{\dfrac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.
$$

一方，$0 < x < 1$ の範囲で $0 < \arctan(x) < x$ であるから，

$$
-\frac{\pi}{2} < 4a - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}
$$

が成り立っている．したがって，求める等式が得られる． □

2 Gauss の公式

[補題 2.1]

$$
3\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right).
$$

[証明] $\tan(x+y+z)$ について，加法公式

$$
\tan(x+y+z) = \frac{\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x)\tan(y)\tan(z)}{1 - \tan(x)\tan(y) - \tan(y)\tan(z) - \tan(z)\tan(x)} \qquad (2)
$$

が成り立つ．よって，

$$\tan(3x+2y+z) = \frac{\tan(3x)+\tan(2y)+\tan(z)-\tan(3x)\tan(2y)\tan(z)}{1-\tan(3x)\tan(2y)-\tan(2y)\tan(z)-\tan(z)\tan(3x)}. \tag{3}$$

(2) より，

$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}.$$

また，

$$\tan(2y) = \frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)}.$$

$a = \arctan(1/18)$, $b = \arctan(1/57)$, $c = \arctan(-1/239)$ とすると，

$$\tan(3a) = 971/5778, \quad \tan(2b) = 57/1624, \quad \tan(c) = -1/239$$

であるから，$\arctan(x)$ が奇関数であることと (3) により，

$$\begin{aligned}
&\tan\left(3\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{57}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) \\
&\quad = \tan\left(3\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{57}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{239}\right)\right) \\
&\quad = \tan(3a+2b+c) = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

となる．一方，$0 < x < 1$ の範囲で $0 < \arctan(x) < x$ であるから，

$$-\frac{\pi}{2} < 3\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+2\arctan\left(\frac{1}{57}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{2}$$

が成り立っている．したがって，求める等式が得られる． □

［定理 2.2（Gauss の公式）］

$$12\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+8\arctan\left(\frac{1}{57}\right)-5\arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

［証明］ Machin の公式と補題 2.1 より得られる． □

3 Störmer の公式

［補題 3.1］

$$3\arctan\left(\frac{1}{57}\right)+\arctan\left(\frac{1}{239}\right)-\arctan\left(\frac{1}{682}\right)+\arctan\left(\frac{1}{12943}\right) = \arctan\left(\frac{1}{18}\right).$$

[証明] $\tan(x+y+z+w)$ について, 加法公式

$$\tan(x+y+z+w) = \frac{\begin{array}{l}\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) + \tan(w) \\ -\tan(x)\tan(y)\tan(z) - \tan(x)\tan(y)\tan(w) \\ -\tan(x)\tan(z)\tan(w) - \tan(y)\tan(z)\tan(w)\end{array}}{\begin{array}{l}1 - \tan(x)\tan(y) - \tan(x)\tan(z) - \tan(x)\tan(w) \\ -\tan(y)\tan(z) - \tan(y)\tan(w) - \tan(z)\tan(w) \\ +\tan(x)\tan(y)\tan(z)\tan(w)\end{array}}$$

が成り立つ. よって,

$$\tan(3x+y+z+2w) = \frac{\begin{array}{l}\tan(3x) + \tan(y) + \tan(z) + \tan(2w) \\ -\tan(3x)\tan(y)\tan(z) - \tan(3x)\tan(y)\tan(2w) \\ -\tan(3x)\tan(z)\tan(2w) - \tan(y)\tan(z)\tan(2w)\end{array}}{\begin{array}{l}1 - \tan(3x)\tan(y) - \tan(3x)\tan(z) - \tan(3x)\tan(2w) \\ -\tan(y)\tan(z) - \tan(y)\tan(2w) - \tan(z)\tan(2w) \\ +\tan(3x)\tan(y)\tan(z)\tan(2w)\end{array}} \tag{4}$$

となる. $a = \arctan(1/57)$, $b = \arctan(1/239)$, $c = \arctan(-1/682)$, $d = \arctan(1/12943)$ とすると, arctan が tan の逆関数であることと倍角公式より

$$\tan(3a) = \frac{4873}{92511}, \quad \tan(b) = \frac{1}{239},$$
$$\tan(c) = -\frac{1}{682}, \quad \tan(2d) = \frac{12943}{83760624}$$

であるから, $\arctan(x)$ が奇関数であることと (4) により,

$$\begin{aligned}
&\tan\left(3\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - \arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{12943}\right)\right) \\
&= \tan\left(3\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) + \arctan\left(-\frac{1}{682}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{12943}\right)\right) \\
&= \tan(3a+b+c+2d) = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

となる. 一方, $0 < x < 1$ の範囲で $0 < \arctan(x) < x$ であるから,

$$-\frac{\pi}{2} < 3\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - \arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{12943}\right) < \frac{\pi}{2}$$

が成り立っている. したがって, 求める等式が得られる. □

[定理 3.2（Störmer の公式）]

$$44\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12\arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24\arctan\left(\frac{1}{12943}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

[証明] Gauss の公式と補題 3.1 より得られる. □