ロピタルの定理の証明

MATHEMATICS.PDF

平成 17 年 12 月 3 日

この文書の主な目的は, ロルの定理から出発して, ロピタルの定理を証明することです.
この文書では実数のみを扱いますので, 数というときには実数を意味し, 関数というときには実数値関数を意味します.
関数 $f(x)$ というときには, x を変数とする関数であることを表しています. また, $f'(x)$ は関数 $f(x)$ を変数 x について微分して得られる導関数を表します.

1　コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理の証明には, 平均値の定理を拡張したものを利用します. それは, コーシーの平均値の定理と呼ばれるものです. コーシーの平均値の定理はロルの定理から導かれます.
まず, ロルの定理を復習します. ロルの定理とは, 以下のような命題です.

定理 1.1（ロルの定理） $f(x)$ を

- 閉区間 $[a, b]$ で連続,
- 開区間 (a, b) で微分可能

なる関数とする. もし
$$f(a) = f(b)$$
ならば, ある数 c が存在して
$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$
が成り立つ.

コーシーの平均値の定理を証明する前に, 通常の平均値の定理を復習します.
平均値の定理とは, 次のような命題です.

定理 1.2（平均値の定理） $f(x)$ を

- 閉区間 $[a, b]$ で連続,
- 開区間 (a, b) で微分可能

なる関数とする. このとき, ある数 c が存在して
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$
が成り立つ.

ロルの定理や平均値の定理は, 微分積分学の教科書に必ず書かれています. そして, 以下に紹介する平均値の定理の証明も, どの教科書でも見かける定番のものです.

証明

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおき,

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

とおく. すると, $F(x)$ は $[a,\, b]$ で連続, $(a,\, b)$ で微分可能な関数になる. さらに,

$$\begin{aligned} &F(a) = 0, \\ &F(b) = f(b) - f(a) - m(b - a) = 0 \end{aligned}$$

である. よって $F(x)$ に対してロルの定理が適用できて, ある数 c が存在して

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

が成り立つ.

$$F'(x) = f'(x) - m$$

なので,

$$f'(c) - m = F'(c) = 0$$

となる. これより

$$m = f'(c),$$

すなわち

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

が得られる. □

いよいよ, コーシーの平均値の定理を証明します.

定理 1.3（コーシーの平均値の定理） $f(x)$, $g(x)$ を

- 閉区間 $[a,\, b]$ で連続,
- 開区間 $(a,\, b)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, b)$ の各点 x において $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき, ある数 c が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b$$

が成り立つ.

コーシーの平均値の定理についていくつか注意しておきます.

まず, 定理の仮定のもとで, $g(a) \neq g(b)$ が必ず成り立ちます. 実際, もし仮に $g(a) = g(b)$ ならば, ロルの定理より, ある数 c が存在して

$$g'(c) = 0, \quad a < c < b$$

が成り立ちます. しかしながら, これは開区間 $(a,\, b)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$ であることに反します.

次に, $g(x) = x$ とおくことにより, 通常の平均値の定理が得られます. したがって確かに, コーシーの平均値の定理は通常の平均値の定理の拡張になっています.

先ほど紹介した平均値の定理の証明において, m と $F(x)$ を

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \\ F(x) &= f(x) - f(a) - m(g(x) - g(a)) \end{aligned}$$

に変更すれば, コーシーの平均値の定理を証明することができます.

証明

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

とおき,

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(g(x) - g(a))$$

とおく. すると, $F(x)$ は $[a,\, b]$ で連続, $(a,\, b)$ で微分可能な関数になる. さらに,

$$\begin{aligned} &F(a) = 0, \\ &F(b) = f(b) - f(a) - k(g(b) - g(a)) = 0 \end{aligned}$$

である. よって $F(x)$ に対してロルの定理が適用できて, ある数 c が存在して

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

が成り立つ.

$$F'(x) = f'(x) - mg'(x)$$

なので,

$$f'(c) - mg'(c) = F'(c) = 0$$

となる. 仮定より $g'(c) \neq 0$ なので

$$m = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

すなわち

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が得られる. □

2　極限の定義

この節では, 関数の極限の定義を復習します.

関数の極限の定義には, 極限値が存在する場合, 極限が限りなく大きくなる場合, 極限が限りなく小さくなる場合の 3 通りがあります. また, それぞれについて, x が点 a に近づく場合, x が a に右から近づく場合, x が a に左から近づく場合, x が限りなく大きくなる場合, x が限りなく小さくなる場合の 5 通りがあります. したがって, 全部で 15 通りの定義があります.

まず, 極限値が存在する場合の定義を書きます.

定義 2.1 a, l を数とし, $f(x)$ を関数とする.

任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つとき, l を

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書く.

定義 2.2 a, l を数とし, $f(x)$ を関数とする.

任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つとき, l を

$$\lim_{x \to a+0} f(x)$$

と書く.

定義 2.3 a, l を数とし, $f(x)$ を関数とする.

任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つとき, l を

$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

と書く.

定義 2.4 l を数とし, $f(x)$ を関数とする.

任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つとき, l を

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

と書く.

定義 2.5 l を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つとき, l を

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

と書く.

次に, 極限が限りなく大きくなる場合の定義を書きます.

定義 2.6 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

と書く.

定義 2.7 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

と書く.

定義 2.8 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

と書く.

定義 2.9 $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書く.

定義 2.10 $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書く.

次に, 極限が限りなく小さくなる場合の定義を書きます.

定義 2.11 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

と書く.

定義 2.12 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$$

と書く.

定義 2.13 a を数とし, $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$

と書く.

定義 2.14 $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

と書く.

定義 2.15 $f(x)$ を関数とする.
任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

が成り立つとき,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

と書く.

3 極限に関する基本的な事項 (1)

定理 3.1 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(a-\gamma,\, a)$ で定義された関数とすると, $f(2a-x)$ は開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で定義された関数である. このとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l \tag{1}$$

となる数 l が存在するならば,

$$\lim_{x \to a+0} f(2a-x) = l \tag{2}$$

が成り立つ.

証明 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (1) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\, f(x) - l\,| < \varepsilon \tag{3}$$

が成り立つ. 式 (3) の x に $2a-x$ を代入すると,

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\, f(2a-x) - l\,| < \varepsilon$$

となる. したがって式 (2) が成り立つ. □

定理 3.2 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(-\gamma,\, -\infty)$ で定義された関数とすると, $f(-x)$ は開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義された関数である. このとき,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \tag{4}$$

となる数 l が存在するならば,

$$\lim_{x \to +\infty} f(-x) = l \tag{5}$$

が成り立つ.

証明 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (4) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow |\, f(x) - l\,| < \varepsilon \tag{6}$$

が成り立つ. 式 (6) の x に $-x$ を代入すると,

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\, f(-x) - l\,| < \varepsilon$$

となる. したがって式 (5) が成り立つ. □

定理 3.3 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義された関数とすると, $f(1/x)$ は開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ で定義された関数である. このとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \tag{7}$$

となる数 l が存在するならば,

$$\lim_{x \to +0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l \tag{8}$$

が成り立つ.

証明 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (7) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon \tag{9}$$

が成り立つ. 式 (9) の x に $1/x$ を代入すると,

$$0 < x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| f\left(\frac{1}{x}\right) - l \right| < \varepsilon$$

となる. したがって式 (8) が成り立つ. □

定理 3.4 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ で定義された関数とする.

(a)

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \tag{10}$$

となる数 l が存在するならば,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = l$$

が成り立つ.

(b)

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = l \tag{11}$$

となる数 l が存在するならば,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

が成り立つ.

証明 (a) 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (10) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon \tag{12}$$

が成り立つ.

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$$

なので, 式 (12) より

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つ. すなわち $\lim_{x \to a+0} f(x) = l$ が成り立つ. 同様に,

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$$

なので, 式 (12) より

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち $\lim_{x\to a-0} f(x) = l$ が成り立つ.

(b)　数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．式 (11) より, ある数 $\delta_{1,\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < x - a < \delta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{13}$$

が成り立つ．同様に, 式 (11) より, ある数 $\delta_{2,\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < a - x < \delta_{2,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{14}$$

が成り立つ.

$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1,\varepsilon},\, \delta_{2,\varepsilon}\}$ とおく．$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ を満たす数 x を任意にとると, $a < x$ のときは

$$0 < x - a \leq |x - a| < \delta_\varepsilon \leq \delta_{1,\varepsilon}$$

であり, $x < a$ のときは

$$0 < a - x \leq |x - a| < \delta_\varepsilon \leq \delta_{2,\varepsilon}$$

である．つまり,

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < x - a < \delta_{1,\varepsilon} \text{ または } 0 < a - x < \delta_{2,\varepsilon}.$$

これと式 (13), 式 (14) より

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって $\lim_{x\to a} f(x) = l$ がいえる.　□

4　極限に関する基本的な事項 (2)

前節の定理に現れる l を ∞ に書き換えた形の定理も成り立ちます.

定理 4.1　γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$ を開区間 $(a-\gamma,\, a)$ で定義された関数とすると, $f(2a-x)$ は開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で定義された関数である．このとき,

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \tag{15}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a+0} f(2a - x) = \infty \tag{16}$$

が成り立つ.

証明　数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．式 (15) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < a - x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{17}$$

が成り立つ．式 (17) の x に $2a - x$ を代入すると,

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(2a - x) > \varepsilon$$

となる．したがって式 (16) が成り立つ.　□

定理 4.2 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(-\gamma,\, -\infty)$ で定義された関数とすると, $f(-x)$ は開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義された関数である. このとき,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \tag{18}$$

ならば,

$$\lim_{x \to +\infty} f(-x) = \infty \tag{19}$$

が成り立つ.

証明 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (18) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{20}$$

が成り立つ. 式 (20) の x に $-x$ を代入すると,

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(-x) > \varepsilon$$

となる. したがって式 (19) が成り立つ. □

定理 4.3 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義された関数とすると, $f(1/x)$ は開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ で定義された関数である. このとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \tag{21}$$

ならば,

$$\lim_{x \to +0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \tag{22}$$

が成り立つ.

証明 数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 式 (21) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{23}$$

が成り立つ. 式 (23) の x に $1/x$ を代入すると,

$$0 < x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) > \varepsilon$$

となる. したがって式 (22) が成り立つ. □

定理 4.4 γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$ を開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ で定義された関数とする.

(a)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{24}$$

ならば

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$$

が成り立つ.

(b)

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \tag{25}$$

ならば

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

が成り立つ.

証明　(a)　数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．式 (24) より, ある数 $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < |x-a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{26}$$

が成り立つ.

$$0 < x-a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$$

なので, 式 (26) より

$$0 < x-a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ が成り立つ．同様に,

$$0 < a-x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$$

なので, 式 (26) より

$$0 < a-x < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$ が成り立つ.

(b)　数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．式 (25) より, ある数 $\delta_{1,\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < x-a < \delta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{27}$$

が成り立つ．同様に, 式 (25) より, ある数 $\delta_{2,\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して,

$$0 < a-x < \delta_{2,\varepsilon} \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \tag{28}$$

が成り立つ.

$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1,\varepsilon},\, \delta_{2,\varepsilon}\}$ とおく．$0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$ を満たす数 x を任意にとると, $a < x$ のときは

$$0 < x-a \leq |x-a| < \delta_\varepsilon \leq \delta_{1,\varepsilon}$$

であり, $x < a$ のときは

$$0 < a-x \leq |x-a| < \delta_\varepsilon \leq \delta_{2,\varepsilon}$$

である．つまり,

$$0 < |x-a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 < x-a < \delta_{1,\varepsilon} \text{ または } 0 < a-x < \delta_{2,\varepsilon}.$$

これと式 (27), 式 (28) より

$$0 < |x-a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

が成り立つ．したがって $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ がいえる.　□

5　ロピタルの定理 (1)

まず, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が共に 0 に収束する場合を証明します.

定理 5.1（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$f(a) = g(a) = 0 \tag{29}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{30}$$

ならば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{31}$$

が成り立つ．

証明 $a < x < a+\gamma$ であるような任意の数 x に対して, 閉区間 $[a,\, x]$ においてコーシーの平均値の定理を適用すると, ある数 c_x が存在して

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad a < c_x < x \tag{32}$$

が成り立つ．これと式 (29) より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \tag{33}$$

が得られる．

数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．式 (30) より, ε に対してある数 $\delta_{1,\varepsilon}$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \tag{34}$$

が成り立つ．

$\delta_\varepsilon = \min\{\gamma,\, \delta_{1,\varepsilon}\}$ とおく．x が $0 < x - a < \delta_\varepsilon$ を満たすとき,

$$a < x < a + \delta_\varepsilon \leq a + \gamma$$

なので, x に対して式 (32) を満たす数 c_x が存在する．このとき,

$$0 < c_x - a < x - a < \delta_\varepsilon \leq \delta_{1,\varepsilon}$$

である．式 (33) と式 (34) より,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l \right| < \varepsilon$$

が得られる．

したがって, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって, 式 (31) が成り立つ． □

次に, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ で定義されていないときを考えます．

定理 5.2（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0 \tag{35}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{36}$$

ならば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

微分可能な関数は連続なので, 定理 5.2 における関数 $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で連続です. もし, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続かつ $f(a) = g(a) = 0$ ならば

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = 0,$$
$$\lim_{x \to a+0} g(x) = g(a) = 0$$

となります. よって, 定理 5.2 は定理 5.1 の拡張になっています.

証明 $x = a$ で 0 をとるように関数 $f(x)$, $g(x)$ を拡張した関数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \text{ のとき} \\ 0, & x = a \text{ のとき} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a \text{ のとき} \\ 0, & x = a \text{ のとき} \end{cases}$$

を考える.

式 (35) より, $F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続になる. $F(x)$, $G(x)$ の定義と式 (36) より

$$\lim_{x \to a+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

だから, 定理 5.1 が適用できて,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が得られる. □

$x \to a-0$ の場合は, 定理 5.2 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 5.3（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\, a)$ で微分可能,

- 開区間 $(a-\gamma,\, a)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = 0$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

ならば,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $F(x) = f(2a-x)$, $G(x) = g(2a-x)$ によって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定める．$F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続である．さらに, 合成関数の微分により

$$F'(x) = -f'(2a-x), \quad G'(x) = -g'(2a-x)$$

が得られるから,

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

である．また,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a+0} F(x) &= \lim_{x \to a+0} f(2a-x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = 0, \\ \lim_{x \to a+0} G(x) &= \lim_{x \to a+0} g(2a-x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = 0 \end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(2a-x)}{g'(2a-x)} = \lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である．ゆえに, 定理 5.2 が適用できて,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(2a-x)}{g(2a-x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

$x \to a$ の場合は, 定理 5.2, 定理 5.3 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 5.4（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \tag{37}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{38}$$

ならば,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{39}$$

が成り立つ.

証明 式 (37), 式 (38) より,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

が成り立つ. 定理 5.2 を適用すれば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{40}$$

が得られる.

同様に, 式 (37), 式 (38) より,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

が成り立つ. 定理 5.3 を適用すれば,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{41}$$

が得られる.

したがって, 式 (40), 式 (41) より, 式 (39) が得られる. □

$x \to \infty$, $x \to -\infty$ の場合, ロピタルの定理は次のようになります.

定理 5.5（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 (γ, ∞) で微分可能,
- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \tag{42}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{43}$$

ならば,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する. $f(x)$, $g(x)$ が開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ で定義することができる.

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2}, \tag{44}$$

$$G'(x) = -\frac{g'(1/x)}{x^2} \tag{45}$$

が得られる. よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (42) より

$$\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to+0} G(x) = \lim_{x\to+0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

であり, 式 (44), 式 (45), 式 (43) より

$$\lim_{x\to+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である. ゆえに, 定理 5.2 が適用できて,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to+0} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

定理 5.6（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \tag{46}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{47}$$

ならば,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f(-x), \quad G(x) = g(-x)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する. $f(x)$, $g(x)$ が開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義することができる.

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -f'(-x), \tag{48}$$

$$G'(x) = -g'(-x) \tag{49}$$

が得られる. よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で微分可能,
- 開区間 $(\gamma,\, \infty)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (46) より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

であり, 式 (48), 式 (49), 式 (47) より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である. ゆえに, 定理 5.5 が適用できて,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{g(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

6 ロピタルの定理 (2)

次に, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が共に ∞ に発散するときを考えます.

定理 6.1（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty \tag{50}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{51}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 式 (50) より, ある数 $\delta_1 > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_1 \Longrightarrow f(x) > 1 \tag{52}$$

が成り立つ. また, ある数 $\delta_2 > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_2 \Longrightarrow g(x) > 1 \tag{53}$$

が成り立つ.

$0 < \varepsilon' < 1$ を満たす数 ε' を任意にとる. 式 (51) より, ε' に対してある数 $\delta_{3,\varepsilon'} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_{3,\varepsilon'} \Longrightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon' \tag{54}$$

が成り立つ.

$0 < x_1 - a < \delta_{3,\varepsilon'}$ を満たすような, $(a,\, a+\gamma)$ の点 x_1 を 1 つとって固定する. そして,

$$\delta_{4,\varepsilon'} = \min\{\delta_1, \delta_2, x_1 - a\}$$

とおく.

$a < x < x_1$ を満たすような数 x を任意にとると, $x,\, x_1 \in (a,\, a+\gamma)$ なので, 関数 $f(t)$, $g(t)$ は

- 閉区間 $[x,\, x_1]$ で連続,
- 開区間 $(x,\, x_1)$ で微分可能,
- 開区間 $(x,\, x_1)$ の各点 t において $g'(t) \neq 0$

を満たす. よってコーシーの平均値の定理より, ある数 c_x が存在して

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad x < c_x < x_1 \tag{55}$$

が成り立つ.

$$0 < x - a < c_x - a < x_1 - a < \delta_{3,\varepsilon'}$$

であるから, 式 (54) より

$$\left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l \right| < \varepsilon' \tag{56}$$

が成り立つ.

さて, 式 (55) は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} \tag{57}$$

と書き直すことができる. ここで, 式 (52), 式 (53) より, $0 < x - a < \delta_{4,\varepsilon'}$ を満たす任意の数 x に対して $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ が成り立つことに注意せよ.

いま, x_1 を固定しているので, $f(x_1)$, $g(x_1)$ は定数であると考えることができる. よって,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{f(x_1)}{f(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \left(1 - \frac{f(x_1)}{f(x)} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right) = 1$$

なので,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}} = 1$$

である. すなわち, ε' に対して, ある数 $\delta_{5,\varepsilon'} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x-a < \delta_{5,\varepsilon'} \Longrightarrow \left| \frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon' \tag{58}$$

となることがいえる.

一般に, 任意の数 u, v, α, M に対して,

$$|u-\alpha| < M, \quad |v-1| < M$$

ならば,

$$\begin{aligned} |uv-\alpha| &= |uv - v\alpha + v\alpha - \alpha| \\ &= |v(u-\alpha) + \alpha(v-1)| \\ &\le |v||u-\alpha| + |\alpha||v-1| \\ &< (1+M)M + |\alpha|M \\ &= (1+|\alpha|+M)M \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\delta_{\varepsilon'} = \min\{\delta_{4,\varepsilon'}, \delta_{5,\varepsilon'}\}$$

とおくと, $0 < x-a < \delta_{\varepsilon'}$ を満たす任意の数 x に対して,

$$u = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad v = \frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}, \quad \alpha = l, \quad M = \varepsilon'$$

とすれば, 式 (57) より

$$uv = \frac{f(x)}{g(x)}$$

なので, 式 (56), 式 (58) と $\varepsilon' < 1$ という条件より

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < (1+|l|+\varepsilon')\varepsilon' < (2+|l|)\varepsilon'$$

が成り立つ.

数 $\varepsilon > 0$ を任意にとり,

$$\varepsilon' = \begin{cases} \dfrac{1}{2+|l|}, & \varepsilon \ge 1 \text{ のとき} \\ \dfrac{\varepsilon}{2+|l|}, & \varepsilon < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば, $\varepsilon' < 1$, $(2+|l|)\varepsilon' \le \varepsilon$ となるので, 証明は完成する.

□

$x \to a-0$ の場合は, 定理 6.1 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 6.2（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\, a)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\, a)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = \infty$$

かつ

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

ならば,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $F(x) = f(2a-x)$, $G(x) = g(2a-x)$ によって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定める. $F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続である. さらに, 合成関数の微分により

$$F'(x) = -f'(2a-x), \quad G'(x) = -g'(2a-x)$$

が得られるから,

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

である. また,

$$\lim_{x \to a+0} F(x) = \lim_{x \to a+0} f(2a-x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x \to a+0} G(x) = \lim_{x \to a+0} g(2a-x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = \infty$$

であり,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(2a-x)}{g'(2a-x)} = \lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である. ゆえに, 定理 6.1 が適用できて,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(2a-x)}{g(2a-x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

$x \to a$ の場合は, 定理 6.1, 定理 6.2 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 6.3（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \tag{59}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{60}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{61}$$

が成り立つ.

証明 式 (59), 式 (60) より,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

が成り立つ. 定理 6.1 を適用すれば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{62}$$

が得られる.

同様に, 式 (59), 式 (60) より,

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

が成り立つ. 定理 6.2 を適用すれば,

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{63}$$

が得られる.

したがって, 式 (62), 式 (63) より, 式 (61) が得られる. □

$x \to \infty$, $x \to -\infty$ の場合, ロピタルの定理は次のようになります.

定理 6.4（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 (γ, ∞) で微分可能,
- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty \tag{64}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{65}$$

ならば,

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する. $f(x)$, $g(x)$ が開区間 (γ, ∞) で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(0, 1/\gamma)$ で定義することができる.

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2}, \tag{66}$$

$$G'(x) = -\frac{g'(1/x)}{x^2} \tag{67}$$

が得られる. よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(0, 1/\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(0, 1/\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (64) より

$$\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to+0} G(x) = \lim_{x\to+0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

であり, 式 (66), 式 (67), 式 (65) より

$$\lim_{x\to+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である. ゆえに, 定理 6.1 が適用できて,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to+0} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

定理 6.5（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(-\infty, -\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(-\infty, -\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty \tag{68}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{69}$$

ならば,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

が成り立つ.

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f(-x), \quad G(x) = g(-x)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する. $f(x)$, $g(x)$ が開区間 $(-\infty,\ -\gamma)$ で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(\gamma,\ \infty)$ で定義することができる.

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -f'(-x), \tag{70}$$

$$G'(x) = -g'(-x) \tag{71}$$

が得られる. よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(\gamma,\ \infty)$ で微分可能,
- 開区間 $(\gamma,\ \infty)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (68) より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$$

であり, 式 (70), 式 (71), 式 (69) より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

である. ゆえに, 定理 6.4 が適用できて,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{g(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = l$$

が成り立つ. □

7 ロピタルの定理 (3)

$f'(x)/g'(x) \to \infty$ の場合にも, ロピタルの定理が成り立ちます. この節では関数 $f(x)$, $g(x)$ が共に 0 に収束するときを考えます.

定理 7.1（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 半開区間 $[a,\ a+\gamma)$ で連続,
- 開区間 $(a,\ a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\ a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$f(a) = g(a) = 0 \tag{72}$$

かつ

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{73}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \tag{74}$$

が成り立つ.

証明 $a<x<a+\gamma$ であるような任意の数 x に対して, 閉区間 $[a,\,x]$ においてコーシーの平均値の定理を適用すると, ある数 c_x が存在して

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},\quad a<c_x<x \tag{75}$$

が成り立つ. これと式 (72) より

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \tag{76}$$

が得られる.

数 $\varepsilon>0$ を任意にとる. 式 (73) より, ε に対してある数 $\delta_{1,\varepsilon}$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0<x-a<\delta_{1,\varepsilon}\Longrightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}>\varepsilon \tag{77}$$

が成り立つ.

$\delta_\varepsilon=\min\{\gamma,\,\delta_{1,\varepsilon}\}$ とおく. x が $0<x-a<\delta_\varepsilon$ を満たすとき,

$$a<x<a+\delta_\varepsilon\le a+\gamma$$

なので, x に対して式 (75) を満たす数 c_x が存在する. このとき,

$$0<c_x-a<x-a<\delta_\varepsilon\le\delta_{1,\varepsilon}$$

である. 式 (76) と式 (77) より,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}>\varepsilon$$

が得られる.

したがって, 任意の数 x に対して

$$0<x-a<\delta_\varepsilon\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>\varepsilon$$

が成り立つ. よって, 式 (74) が成り立つ. □

次に, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ で定義されていないときを考えます.

定理 7.2（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma>0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a,\,a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\,a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x)\neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=0 \tag{78}$$

かつ

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \tag{79}$$

ならば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ.

微分可能な関数は連続なので, 定理 7.2 における関数 $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a,\ a+\gamma)$ で連続です. もし, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が半開区間 $[a,\ a+\gamma)$ で連続かつ $f(a) = g(a) = 0$ ならば

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = 0,$$

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = g(a) = 0$$

となります. よって, 定理 7.2 は定理 7.1 の拡張になっています.

証明 $x = a$ で 0 をとるように関数 $f(x)$, $g(x)$ を拡張した関数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \text{ のとき} \\ 0, & x = a \text{ のとき} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a \text{ のとき} \\ 0, & x = a \text{ のとき} \end{cases}$$

を考える.

式 (78) より, $F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\ a+\gamma)$ で連続になる. $F(x)$, $G(x)$ の定義と式 (79) より

$$\lim_{x \to a+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

だから, 定理 7.1 が適用できて,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が得られる. □

$x \to a-0$ の場合は, 定理 7.2 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 7.3（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\ a)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\ a)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = 0$$

かつ

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

ならば,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ.

証明 $F(x)=f(2a-x)$, $G(x)=g(2a-x)$ によって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定める. $F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\,a+\gamma)$ で連続である. さらに, 合成関数の微分により

$$F'(x)=-f'(2a-x),\quad G'(x)=-g'(2a-x)$$

が得られるから,

- 開区間 $(a,\,a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\,a+\gamma)$ の各点 x で $G'(x)\neq 0$

である. また,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+0}F(x)&=\lim_{x\to a+0}f(2a-x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=0,\\ \lim_{x\to a+0}G(x)&=\lim_{x\to a+0}g(2a-x)=\lim_{x\to a-0}g(x)=0\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(2a-x)}{g'(2a-x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$$

である. ゆえに, 定理 7.2 が適用できて,

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(2a-x)}{g(2a-x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{F(x)}{G(x)}=\infty$$

が成り立つ. □

$x\to a$ の場合は, 定理 7.2, 定理 7.3 と極限に関する基本的な事項から導くことができます.

定理 7.4（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma>0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\,a)\cup(a,\,a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\,a)\cup(a,\,a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x)\neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0 \tag{80}$$

かつ

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \tag{81}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \tag{82}$$

が成り立つ.

証明 式 (80), 式 (81) より,

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

かつ

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$$

が成り立つ．定理 7.2 を適用すれば，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{83}$$

が得られる．

同様に，式 (80)，式 (81) より，

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

かつ

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

が成り立つ．定理 7.3 を適用すれば，

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{84}$$

が得られる．

したがって，式 (83)，式 (84) より，式 (82) が得られる． □

$x \to \infty$, $x \to -\infty$ の場合，ロピタルの定理は次のようになります．

定理 7.5（ロピタルの定理） γ を数とし，$\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 (γ, ∞) で微分可能，
- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \tag{85}$$

かつ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{86}$$

ならば，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ．

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して，

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

とおくことによって，新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する．$f(x)$, $g(x)$ が開区間 (γ, ∞) で定義されていれば，$F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(0, 1/\gamma)$ で定義することができる．

合成関数の微分により，

$$F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2}, \tag{87}$$

$$G'(x) = -\frac{g'(1/x)}{x^2} \tag{88}$$

が得られる．よって，$F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(0,\ 1/\gamma)$ で微分可能,

- 開区間 $(0,\ 1/\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる．また, 式 (85) より

$$\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to+0} G(x) = \lim_{x\to+0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

であり, 式 (87), 式 (88), 式 (86) より

$$\lim_{x\to+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

である．ゆえに, 定理 7.2 が適用できて,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が成り立つ． $\square$

定理 7.6（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(-\infty,\ -\gamma)$ で微分可能,

- 開区間 $(-\infty,\ -\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \tag{89}$$

かつ

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{90}$$

ならば,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ．

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f(-x), \quad G(x) = g(-x)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する．$f(x)$, $g(x)$ が開区間 $(-\infty,\ -\gamma)$ で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(\gamma,\ \infty)$ で定義することができる．

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -f'(-x), \tag{91}$$
$$G'(x) = -g'(-x) \tag{92}$$

が得られる．よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(\gamma,\ \infty)$ で微分可能,

- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (89) より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

であり, 式 (91), 式 (92), 式 (90) より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

である. ゆえに, 定理 7.5 が適用できて,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{g(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が成り立つ. □

8 ロピタルの定理 (4)

この節では, $f'(x)/g'(x) \to \infty$ であって, 関数 $f(x)$, $g(x)$ が共に ∞ に発散するときを考えます.

定理 8.1（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする. $f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする. このとき,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty \tag{93}$$

かつ, ある数 l が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{94}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ.

証明 式 (93) より, ある数 $\delta_1 > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_1 \Longrightarrow f(x) > 1 \tag{95}$$

が成り立つ. また, ある数 $\delta_2 > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_2 \Longrightarrow g(x) > 1 \tag{96}$$

が成り立つ.

数 $\varepsilon' > 0$ を任意にとる．式 (94) より, ε' に対してある数 $\delta_{3,\varepsilon'} > 0$ が存在して, 任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_{3,\varepsilon'} \Longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > \varepsilon' \tag{97}$$

が成り立つ．

$0 < x_1 - a < \delta_{3,\varepsilon'}$ を満たすような, $(a,\, a+\gamma)$ の点 x_1 を 1 つとって固定する．そして,

$$\delta_{4,\varepsilon'} = \min\{\delta_1, \delta_2, x_1 - a\}$$

とおく．

$a < x < x_1$ を満たすような数 x を任意にとると, $x,\, x_1 \in (a,\, a+\gamma)$ なので, 関数 $f(t)$, $g(t)$ は

- 閉区間 $[x,\, x_1]$ で連続,
- 開区間 $(x,\, x_1)$ で微分可能,
- 開区間 $(x,\, x_1)$ の各点 t において $g'(t) \neq 0$

を満たす．よってコーシーの平均値の定理より, ある数 c_x が存在して

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad x < c_x < x_1 \tag{98}$$

が成り立つ．

$$0 < x - a < c_x - a < x_1 - a < \delta_{3,\varepsilon'}$$

であるから, 式 (97) より

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > \varepsilon' \tag{99}$$

が成り立つ．

さて, 式 (98) は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} \tag{100}$$

と書き直すことができる．ここで, 式 (95), 式 (96) より, $0 < x - a < \delta_{4,\varepsilon'}$ を満たす任意の数 x に対して $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ が成り立つことに注意せよ．

いま, x_1 を固定しているので, $f(x_1)$, $g(x_1)$ は定数であると考えることができる．よって,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{f(x_1)}{f(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \left(1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) = 1$$

なので,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} = 1$$

である．すなわち，ある数 $\delta_{5,\varepsilon'} > 0$ が存在して[1]，任意の数 x に対して

$$0 < x - a < \delta_{5,\varepsilon'} \Longrightarrow \left| \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

となることがいえる．一般に，任意の数 u に対して

$$|u - 1| < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < u - 1 < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < u < \frac{3}{2}$$

であるから，

$$0 < x - a < \delta_{5,\varepsilon'} \Longrightarrow \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} > \frac{1}{2} \tag{101}$$

である．

よって，

$$\delta_{\varepsilon'} = \min\{\delta_{4,\varepsilon'}, \delta_{5,\varepsilon'}\}$$

とおくと，$0 < x - a < \delta_{\varepsilon'}$ を満たす任意の数 x に対して，式 (100)，式 (101)，式 (99) より

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > \frac{1}{2}\varepsilon'$$

が成り立つ．

数 $\varepsilon > 0$ を任意にとり，$\varepsilon' = 2\varepsilon$ とおけば，証明は完成する．

□

$x \to a - 0$ の場合は，定理 8.1 と極限に関する基本的な事項から導くことができます．

定理 8.2（ロピタルの定理） γ を数とし，$\gamma > 0$ とする．$f(x)$，$g(x)$ を

- 開区間 $(a - \gamma,\, a)$ で微分可能，
- 開区間 $(a - \gamma,\, a)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき，

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a-0} g(x) = \infty$$

かつ

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

ならば，

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ．

[1] $\delta_{5,\varepsilon'}$ の取り方は x_1 に依存しています．また，x_1 の取り方は ε' に依存しています．つまり，$\delta_{5,\varepsilon'}$ の取り方は ε' に依存しています．

証明 $F(x) = f(2a-x)$, $G(x) = g(2a-x)$ によって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定める．$F(x)$, $G(x)$ は半開区間 $[a,\, a+\gamma)$ で連続である．さらに, 合成関数の微分により

$$F'(x) = -f'(2a-x), \quad G'(x) = -g'(2a-x)$$

が得られるから,

- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

である．また,

$$\lim_{x\to a+0} F(x) = \lim_{x\to a+0} f(2a-x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to a+0} G(x) = \lim_{x\to a+0} g(2a-x) = \lim_{x\to a-0} g(x) = \infty$$

であり,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(2a-x)}{g'(2a-x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

である．ゆえに, 定理 8.1 が適用できて,

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(2a-x)}{g(2a-x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が成り立つ． □

$x \to a$ の場合は, 定理 8.1, 定理 8.2 と極限に関する基本的な事項から導くことができます．

定理 8.3（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(a-\gamma,\, a) \cup (a,\, a+\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \tag{102}$$

かつ

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{103}$$

ならば,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{104}$$

が成り立つ．

証明 式 (102), 式 (103) より,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

かつ

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

が成り立つ．定理 8.1 を適用すれば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{105}$$

が得られる．

同様に, 式 (102), 式 (103) より,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

かつ

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

が成り立つ．定理 8.2 を適用すれば,

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{106}$$

が得られる．

したがって, 式 (105), 式 (106) より, 式 (104) が得られる． □

$x \to \infty$, $x \to -\infty$ の場合, ロピタルの定理は次のようになります．

定理 8.4（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 (γ, ∞) で微分可能,
- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \tag{107}$$

かつ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{108}$$

ならば,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ．

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する．$f(x)$, $g(x)$ が開区間 (γ, ∞) で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(0, 1/\gamma)$ で定義することができる．

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2}, \tag{109}$$

$$G'(x) = -\frac{g'(1/x)}{x^2} \tag{110}$$

が得られる．よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(0,\, 1/\gamma)$ の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる．また, 式 (107) より

$$\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to+0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to+0} G(x) = \lim_{x\to+0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

であり, 式 (109), 式 (110), 式 (108) より

$$\lim_{x\to+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

である．ゆえに, 定理 8.1 が適用できて,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が成り立つ． □

定理 8.5（ロピタルの定理） γ を数とし, $\gamma > 0$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を

- 開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ で微分可能,
- 開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ の各点 x で $g'(x) \neq 0$

なる関数とする．このとき,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty \tag{111}$$

かつ

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{112}$$

ならば,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

が成り立つ．

証明 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$F(x) = f(-x), \quad G(x) = g(-x)$$

とおくことによって, 新しい関数 $F(x)$, $G(x)$ を定義する．$f(x)$, $g(x)$ が開区間 $(-\infty,\, -\gamma)$ で定義されていれば, $F(x)$, $G(x)$ は開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で定義することができる．

合成関数の微分により,

$$F'(x) = -f'(-x), \tag{113}$$
$$G'(x) = -g'(-x) \tag{114}$$

が得られる．よって, $F(x)$, $G(x)$ は

- 開区間 $(\gamma,\, \infty)$ で微分可能,

- 開区間 (γ, ∞) の各点 x で $G'(x) \neq 0$

であることがわかる. また, 式 (111) より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$$

であり, 式 (113), 式 (114), 式 (112) より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

である. ゆえに, 定理 8.4 が適用できて,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{g(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty$$

が成り立つ. $\square$