1 ホモロジー加群

R を環とする.

定義 1.1. 左 R 加群の系

$$A := (A_n \mid n \in \mathbb{Z}), \quad B := (B_n \mid n \in \mathbb{Z})$$

が与えられているとする.

ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して, すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して, R 準同型

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow B_{n+k}$$

が定まっているとき, R 準同型の系

$$\varphi := (\varphi_n : A_n \longrightarrow B_{n+k} \mid n \in \mathbb{Z})$$

を A から B への**次数** k の R 準同型という.

記号 1.2. A から B への次数 k の R 準同型 φ を表すとき, 普通の写像と同じように

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

という記号を用いる.

定義 1.3. 左 R 加群の系

$$C := (C_n \mid n \in \mathbb{Z})$$

と, 次数 -1 の R 準同型

$$\partial := (\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z})$$

とが, 条件

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき, 組 $X := (C, \partial)$ を**鎖複体**という.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, C_n を n 次**複体加群**, ∂_n を n 次**境界作用素**という.

記号 1.4. 後に定義する双対鎖複体を表すための記号との区別を明確にするために, 鎖複体 (C, ∂) を (C_n, ∂_n) と書くことにする.

定義 1.5. $X := (C_n, \partial_n)$ を鎖複体とする．各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$Z_n(X) := \operatorname{Ker} \partial_n$$

を X の n 次**輪体加群**といい，

$$B_n(X) := \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

を X の n 次**境界加群**という．

$Z_n(X)$ の元を n 次**輪体**といい，$B_n(X)$ の元を n 次**境界輪体**という．

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ より，

$$B_n(X) \subseteq Z_n(X) \subseteq X_n$$

が成り立つ．よって剰余 R 加群

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$$

が定義できる．

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[d, dash] \arrow[rdd, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[d, dash] \arrow[rdd, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[d, dash] \\
Z_{n+1}(X) \arrow[d, dash] \arrow[rdd] & Z_n(X) \arrow[d, dash] \arrow[rdd] & Z_{n-1}(X) \arrow[d, dash] \\
B_{n+1}(X) \arrow[d, dash] & B_n(X) \arrow[d, dash] & B_{n-1}(X) \arrow[d, dash] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

定義 1.6. $H_n(X)$ を n 次**ホモロジー加群**という．

$H(X) := (H_n(X) \mid n \in \mathbb{Z})$ を X の**ホモロジー加群**という．

定義 1.7. 二つの鎖複体 $X := (C_n, \partial_n)$, $X' := (C'_n, \partial'_n)$ に対して，R 準同型の系

$$f := (f_n : C_n \to C'_n \mid n \in \mathbb{Z})$$

が X から X' への**複体写像**であるとは，

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき，言いかえると，図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換であるときにいう．

記号 1.8. f が X から X' への複体写像であるとき, 普通の写像のように, $f : X \to X'$ は複体写像である, と書く.

例 1.9. $X := (C_n, \partial_n)$ を鎖複体とする. X 上の**恒等写像**

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$

とは, 恒等写像

$$\mathrm{id}_{C_n} : C_n \longrightarrow C_n, \quad x \longmapsto x$$

からなる R 準同型の系

$$\mathrm{id}_X := (\mathrm{id}_{C_n} : C_n \longrightarrow C_n \mid n \in \mathbb{Z})$$

のことである.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C_{n+1}}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C_n}"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C_{n-1}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

id_X が複体写像であることは明らかである.

命題 1.10. $Z_n := Z_n(X),\ B_n := B_n(X)$ などとおく.

(i) $f_n(Z_n) \subseteq Z'_n$.

(ii) $f_n(B_n) \subseteq B'_n$.

証明. (i) 可換性 $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$ より,

$$\partial'_n \circ f_n(Z_n) = f_{n-1} \circ \partial_n(Z_n) = 0.$$

ゆえに

$$f_n(Z_n) \subseteq Z'_n.$$

(ii) 可換性 $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$ より,

$$f_n(B_n) = f_n \circ \partial_{n+1}(C_{n+1}) = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq B'_n.$$

□

$f_n(Z_n) \subseteq Z'_n$, $f_n(B_n) \subseteq B'_n$ より, f_n は R 準同型

$$f_n^* : H_n(X) \longrightarrow H_n(X'), \quad z + B_n \longmapsto f_n(z) + B'_n \quad (z \in Z_n)$$

を引き起こす.

定義 1.11.　鎖複体 $X := (C_n, \partial_n)$ から鎖複体 $X' := (C'_n, \partial'_n)$ への複体写像

$$f := (f_n : C_n \to C'_n \mid n \in \mathbb{Z})$$

に対して, R 準同型の系

$$f^* := (f^*_n : H_n(X) \longrightarrow H_n(X') \mid n \in \mathbb{Z})$$

を, f によって引き起こされた**ホモロジー写像**という.

記号 1.12.　f^* が複体写像 f によって引き起こされたホモロジー写像であるとき, 普通の写像のように, $f^* : H(X) \to H(X')$ はホモロジー写像である, と書く.

例 1.13.　$H(X)$ をホモロジー加群とする.
$H(X)$ 上の**恒等写像**とは, 鎖複体 X 上の恒等写像

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$

から引き起こされるホモロジー写像

$$\mathrm{id}^*_X : H(X) \longrightarrow H(X)$$

のことである.

定義 1.14.　鎖複体

$$X := (C_n, \partial_n), \quad X' := (C'_n, \partial'_n), \quad X'' := (C''_n, \partial''_n)$$

と, 複体写像

$$f : X \longrightarrow X', \quad g : X' \longrightarrow X''$$

とが与えられているとする.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

が**完全系列**であるとは, 各 $n \in \mathbb{Z}$ について

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$$

が完全系列であるとき, すなわち, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "g_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C''_{n+1} \arrow[r, "\partial''_{n+1}"] \arrow[d] & C''_n \arrow[r, "\partial''_n"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

が可換であるときにいう.

定理 1.15.　鎖複体の完全系列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

が与えられているとする. このとき, 次数 -1 の R 準同型

$$\delta := (\delta_n : H_n(X'') \longrightarrow H_{n-1}(X) \mid n \in \mathbb{Z})$$

が存在して,

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{f_n^*} H_n(X') \xrightarrow{g_n^*} H_n(X'')$$

$$\xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_{n-1}^*} H_{n-1}(X') \xrightarrow{g_{n-1}^*} H_{n-1}(X'')$$

$$\xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots\cdots$$

が完全系列になる.
　δ を**連結準同型**という.

証明.　$H_n(X'')$ の元

$$x''_n + B_n(X'') \quad (x''_n \in Z_n(X''))$$

に対して, 次のようにして $H_{n-1}(X)$ の元

$$x_{n-1} + B_{n-1}(X) \quad (x_{n-1} \in Z_{n-1}(X))$$

を定める.

手順 1　g_n は全射なので,

$$\exists x'_n \in C'_n \ \text{ s.t. } \ g_n(x'_n) = x''_n.$$

手順 2　$g_{n-1} \circ \partial'_n = \partial''_n \circ g_n$ より,

$$g_{n-1}(\partial'_n(x'_n)) = \partial''_n(g_n(x'_n)) = \partial''_n(x''_n) = 0.$$

ゆえに,

$$\partial'_n(x'_n) \in \operatorname{Ker} g_{n-1} = \operatorname{Im} f_{n-1}.$$

よって,

$$\exists x_{n-1} \in C_{n-1} \ \text{ s.t. } \ f_{n-1}(x_{n-1}) = \partial'_n(x'_n).$$

　写像 $\delta_n : H_n(X'') \longrightarrow H_{n-1}(X)$ を

$$\delta_n(x''_n + B_n(X'')) = x_{n-1} + B_{n-1}(X)$$

によって定義するわけだが, そのためには次の二つのことを確認しなければならない.

<u>$c_{n-1} \in Z_{n-1}(X)$ であること</u>: $f_{n-2} \circ \partial_{n-1} = \partial'_{n-1} \circ f_{n-1}$ より,

$$f_{n-2}(\partial_{n-1}(x_{n-1})) = \partial'_{n-1}(f_{n-1}(x_{n-1})) = \partial'_{n-1}(\partial'_n(x'_n)) = 0.$$

f_{n-2} は単射であるから,

$$\partial_{n-1}(x_{n-1}) = 0.$$

したがって,

$$x_{n-1} \in Z_{n-1}(X).$$

<u>δ_n が well-defined であること</u>: 二つの元 $x''_n, y''_n \in Z_n(X'')$ をとり,

$$x''_n \equiv y''_n \mod B_n(X'')$$

であると仮定する. このとき,

$$\exists b''_{n+1} \in C''_{n+1} \text{ s.t. } \partial''_{n+1}(b''_{n+1}) = x''_n - y''_n.$$

g_{n+1} は全射であるから,

$$\exists b'_{n+1} \in C'_{n+1} \text{ s.t. } g_{n+1}(b'_{n+1}) = b''_{n+1}.$$

一方, 手順 1, 手順 2 を y''_n についても行うと,

$$\exists y'_n \in C'_n \text{ s.t. } g_n(y'_n) = y''_n,$$

$$\exists y_{n-1} \in C_{n-1} \text{ s.t. } f_{n-1}(y_{n-1}) = \partial'_n(y'_n).$$

ゆえに,

$$g_n(x'_n) - g_n(y'_n) = x''_n - y''_n = \partial''_{n+1}(b''_{n+1}) = \partial''_{n+1}(g_{n+1}(b'_{n+1})) = g_n(\partial'_{n+1}(b'_{n+1})).$$

よって,

$$g_n(x'_n - y'_n - \partial'_{n+1}(b'_{n+1})) = 0.$$

したがって,

$$x'_n - y'_n - \partial'_{n+1}(b'_{n+1}) \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n.$$

ゆえに,

$$\exists a_n \in C_n \text{ s.t. } x'_n - y'_n - \partial'_{n+1}(b'_{n+1}) = f_n(a_n).$$

したがって,

$$f_{n-1}(x_{n-1} - y_{n-1}) = \partial'_n(x'_n - y'_n) = \partial'_n(f_n(a_n)) = f_{n-1}(\partial_n(a_n)).$$

f_{n-1} は単射であるから,

$$x_{n-1} - y_{n-1} = \partial_n(a_n).$$

ゆえに,

$$x_{n-1} \equiv y_{n-1} \mod B_{n-1}(X).$$

以上より, 写像 δ_n が実際に定まることがわかった.

δ_n が R 準同型であることや, 系列が完全になることは, 地道に一つ一つ確かめていけばよい. □

2　コホモロジー加群

定義 2.1.　左 R 加群の系

$$C := (C^n \mid n \in \mathbb{Z})$$

と, 次数 1 の R 準同型

$$d := (d^n : C^n \longrightarrow C^{n+1} \mid n \in \mathbb{Z})$$

とが, 条件

$$d^{n+1} \circ d^n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき, 組 $X := (C, d)$ を**双対鎖複体**という.

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, C^n を n 次**双対複体加群**, d^n を n 次**双対境界作用素**という.

記号 2.2.　鎖複体を表すための記号との区別を明確にするために, 双対鎖複体 (C, d) を (C^n, d^n) と書くことにする.

定義 2.3.　$X := (C^n, d^n)$ を鎖複体とする. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$Z^n(X) := \operatorname{Ker} d^n$$

を X の n 次**双対輪体加群**といい,

$$B^n(X) := \operatorname{Im} d^{n-1}$$

を X の n 次**双対境界加群**という.

$Z^n(X)$ の元を n 次**双対輪体**といい, $B^n(X)$ の元を n 次**双対境界輪体**という.

$d^n \circ d^{n-1} = 0$ より,

$$B^n(X) \subseteq Z^n(X) \subseteq C^n$$

が成り立つ. よって剰余 R 加群

$$H^n(X) := Z^n(X)/B^n(X)$$

が定義できる.

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1} \arrow[d, dash] \arrow[ddr, "d^{n-1}"] & C^n \arrow[d, dash] \arrow[ddr, "d^n"] & C^{n+1} \arrow[d, dash] \\
Z^{n-1}(X) \arrow[d, dash] \arrow[ddr] & Z^n(X) \arrow[d, dash] \arrow[ddr] & Z^{n+1}(X) \arrow[d, dash] \\
B^{n-1}(X) \arrow[d, dash] & B^n(X) \arrow[d, dash] & B^{n+1}(X) \arrow[d, dash] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

定義 2.4. $H^n(X)$ を n 次**コホモロジー加群**という.

$H(X) := (H^n(X) \mid n \in \mathbb{Z})$ を X の**コホモロジー加群**という.

定義 2.5. 二つの双対鎖複体 $X := (C^n, d^n)$, $X' := ({C'}^n, {d'}^n)$ に対して, R 準同型の系

$$f := (f^n : C^n \to {C'}^n \mid n \in \mathbb{Z})$$

が X から X' への**双対複体写像**であるとは,

$$f^{n+1} \circ d^n = {d'}^n \circ f^n \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき, 言いかえると, 図式

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "{d'}^{n-1}"] & C'^n \arrow[r, "{d'}^n"] & C'_{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

が可換であるときにいう.

記号 2.6. f が X から X' への双対複体写像であるとき, 普通の写像のように, $f : X \to X'$ は双対複体写像である, と書く.

例 2.7. $X := (C^n, d^n)$ を双対鎖複体とする. X 上の**恒等写像**

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$

とは, 恒等写像

$$\mathrm{id}_{C^n} : C^n \longrightarrow C^n, \quad x \longmapsto x$$

からなる R 準同型の系

$$\mathrm{id}_X := (\mathrm{id}_{C^n} : C^n \longrightarrow C^n \mid n \in \mathbb{Z})$$

のことである.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C^{n-1}}"'] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C^n}"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C^{n+1}}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "{d'}^{n-1}"] & C'^n \arrow[r, "{d'}^n"] & C'_{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

id_X が双対複体写像であることは明らかである.

命題 2.8. $Z^n := Z^n(X)$, $B^n := B^n(X)$ などとおく.

(i) $f^n(Z^n) \subseteq {Z'}^n$.

(ii) $f^n(B^n) \subseteq {B'}^n$.

証明. (i) 可換性 $f^{n+1} \circ d^n = {d'}^n \circ f^n$ より,

$$ {d'}^n \circ f^n(Z^n) = f^{n+1} \circ d^n(Z^n) = 0. $$

ゆえに

$$ f^n(Z^n) \subseteq {Z'}^n. $$

(ii) 可換性 $f^n \circ d^{n-1} = {d'}^{n-1} \circ f^{n-1}$ より,

$$ f^n(B^n) = f^n \circ d^{n-1}(C^{n-1}) = {d'}^{n-1} \circ f^{n-1}(C^{n-1}) \subseteq {B'}^n. $$

□

$f^n(Z^n) \subseteq {Z'}^n$, $f^n(B^n) \subseteq {B'}^n$ より, f^n は R 準同型

$$ f^{n*} : H^n(X) \longrightarrow H^n(X'), \quad z + B^n \longmapsto f^n(z) + {B'}^n \quad (z \in Z^n) $$

を引き起こす.

定義 2.9. 双対鎖複体 $X := (C^n, d^n)$ から鎖複体 $X' := ({C'}^n, {d'}^n)$ への双対複体写像

$$ f := (f^n : C^n \to {C'}^n \mid n \in \mathbb{Z}) $$

に対して, R 準同型の系

$$ f^* := (f^{n*} : H^n(X) \longrightarrow H^n(X') \mid n \in \mathbb{Z}) $$

を, f によって引き起こされた**コホモロジー写像**という.

記号 2.10. f^* が双対複体写像 f によって引き起こされたコホモロジー写像であるとき, 普通の写像のように, $f^* : H(X) \to H(X')$ はコホモロジー写像である, と書く.

例 2.11. $H(X)$ をコホモロジー加群とする.

$H(X)$ 上の**恒等写像**とは, 双対鎖複体 X 上の恒等写像

$$ \mathrm{id}_X : X \longrightarrow X $$

から引き起こされるコホモロジー写像

$$ \mathrm{id}_X^* : H(X) \longrightarrow H(X) $$

のことである.

定義 2.12. 双対鎖複体

$$X := (C^n, d^n), \quad X' := (C'^n, d'^n), \quad X'' := (C''^n, d''^n)$$

と, 双対複体写像

$$f : X \longrightarrow X', \quad g : X' \longrightarrow X''$$

とが与えられているとする.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

が**完全系列**であるとは, 各 $n \in \mathbb{Z}$ について

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{f^n} C'^n \xrightarrow{g^n} C''^n \longrightarrow 0$$

が完全系列であるとき, すなわち, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'^{n-1} \arrow[r, "d'^{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}"'] & C'^n \arrow[r, "d'^n"] \arrow[d, "g^n"'] & C'^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C''^{n-1} \arrow[r, "d''^{n-1}"] \arrow[d] & C''^n \arrow[r, "d''^n"] \arrow[d] & C''^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

が可換であるときにいう.

定理 2.13. 双対鎖複体の完全系列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

が与えられているとする. このとき, 次数 -1 の R 準同型

$$\delta := (\delta^n : H^n(X'') \longrightarrow H^{n+1}(X) \mid n \in \mathbb{Z})$$

が存在して,

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{f^{n*}} H^n(X') \xrightarrow{g^{n*}} H^n(X'')$$

$$\xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{f^{n+1*}} H^{n+1}(X') \xrightarrow{g^{n+1*}} H^{n+1}(X'')$$

$$\xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\cdots$$

が完全系列になる.

鎖複体のときと同じように, δ を**連結準同型**という.

証明. $H^n(X'')$ の元

$$x''^n + B^n(X'') \quad (x''^n \in Z^n(X''))$$

に対して, 次のようにして $H^{n+1}(X)$ の元

$$x^{n+1} + B^{n+1}(X) \quad (x^{n+1} \in Z^{n+1}(X))$$

を定める.

手順 1 g^n は全射なので,

$$\exists x'^n \in C^{n\prime} \ \text{ s.t. } \ g^n(x'^n) = x''^n.$$

手順 2 $g^{n+1} \circ d'^n = d''^n \circ g^n$ より,

$$g^{n+1}(d'^n(x'^n)) = d''^n(g^n(x'^n)) = d''^n(x''^n) = 0.$$

ゆえに,

$$d'^n(x'^n) \in \operatorname{Ker} g^{n+1} = \operatorname{Im} f^{n+1}.$$

よって,

$$\exists x^{n+1} \in C^{n+1} \ \text{ s.t. } \ f^{n+1}(x^{n+1}) = d'^n(x'^n).$$

写像 $\delta^n : H^n(X'') \longrightarrow H^{n+1}(X)$ を

$$\delta^n(x''^n + B^n(X'')) = x^{n+1} + B^{n+1}(X)$$

によって定義するわけだが, そのためには次の二つのことを確認しなければならない.

$\underline{c^{n+1} \in Z^{n+1}(X)\text{ であること}}$: $f^{n+2} \circ d^{n+1} = d'^{n+1} \circ f^{n+1}$ より,

$$f^{n+2}(d^{n+1}(x^{n+1})) = d'^{n+1}(f^{n+1}(x^{n+1})) = d'^{n+1}(d'^n(x'^n)) = 0.$$

f^{n+2} は単射であるから,

$$d^{n+1}(x^{n+1}) = 0.$$

したがって,

$$x^{n+1} \in Z^{n+1}(X).$$

$\underline{\delta^n\text{ が well-defined であること}}$: 二つの元 $x''^n, y''^n \in Z^n(X'')$ をとり,

$$x''^n \equiv y''^n \mod B^n(X'')$$

であると仮定する. このとき,

$$\exists b''^{n-1} \in C^{n-1\prime\prime} \ \text{ s.t. } \ d''^{n-1}(b''^{n-1}) = x''^n - y''^n.$$

g^{n-1} は全射であるから,

$$\exists b'^{n-1} \in C^{n-1\prime} \ \text{ s.t. } \ g^{n-1}(b'^{n-1}) = b''^{n-1}.$$

一方, 手順 1, 手順 2 を y''^n についても行うと,

$$\exists y'^n \in C^{n\prime} \ \text{ s.t. } \ g^n(y'^n) = y''^n,$$

$$\exists y^{n+1} \in C^{n+1} \ \text{ s.t. } \ f^{n+1}(y^{n+1}) = d'^n(y'^n).$$

ゆえに,

$$g^n(x'^n) - g^n(y'^n) = x''^n - y''^n = d''^{n-1}(b''^{n-1}) = d''^{n-1}(g^{n-1}(b'^{n-1})) = g^n(d'^{n-1}(b'^{n-1})).$$

よって,

$$g^n(x'^n - y'^n - d'^{n-1}(b'^{n-1})) = 0.$$

したがって,

$$x'^n - y'^n - d'^{n-1}(b'^{n-1}) \in \operatorname{Ker} g^n = \operatorname{Im} f^n.$$

ゆえに,

$$\exists a^n \in C^n \ \text{ s.t. } \ x'^n - y'^n - d'^{n-1}(b'^{n-1}) = f^n(a^n).$$

したがって,

$$f^{n+1}(x^{n+1} - y^{n+1}) = d'^n(x'^n - y'^n) = d'^n(f^n(a^n)) = f^{n+1}(d^n(a^n)).$$

f^{n+1} は単射であるから,

$$x^{n+1} - y^{n+1} = d^n(a^n).$$

ゆえに,

$$x^{n+1} \equiv y^{n+1} \mod B^{n+1}(X).$$

以上より, 写像 δ^n が実際に定まることがわかった.

δ^n が R 準同型であることや, 系列が完全になることは, 地道に一つ一つ確かめていけばよい. □

参考文献

[1] 彌永昌吉, 小平邦彦：現代数学概説 I，岩波書店 (1961)

[2] 河田敬義：ホモロジー代数 I，岩波書店 (1976)

[3] 森田康夫：代数概論，裳華房 (1987)

索 引