Hamilton-Cayley の定理の証明

n を正の整数, K を体, $M_n(K)$ を K 上の n 次正方行列全体とする．また, O を零行列, E を単位行列とする．

［定理 1（Hamilton-Cayley）］ 任意の $A \in M_n(K)$ に対して, $F_A(x) = \det(xE - A) \in K[x]$ を A の固有多項式とし,

$$F_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad c_i \in K \tag{1}$$

とおく．このとき,

$$F_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E \tag{2}$$

によって $F_A(A) \in M_n(K)$ を定めると, $F_A(A) = O$ が成り立つ.

［証明］ $\overline{K}$ を K の代数的閉包[1)]とする．$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ を A のすべての固有値とする．

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $F_A(x)$ のすべての根なので, $\overline{K}[x]$ において

$$F_A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

と 1 次式の積に分解する．この右辺を展開して式 (1) の右辺と係数を比較すると, 各 c_i は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の基本対称式になる:

$$\begin{aligned}
c_{n-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\
c_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
&\cdots\cdots \\
c_{n-k} &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}, \\
&\cdots\cdots \\
c_0 &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.
\end{aligned}$$

これを式 (2) に代入すると, その右辺は $(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E)\cdots(A - \alpha_n E)$ を展開した式に一致する．したがって,

$$F_A(A) = (A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E)\cdots(A - \alpha_n E) \tag{3}$$

が得られる.

[1)] 体 K の代数的閉包とは, K の代数拡大体であって代数的閉体であるようなものである．また, 体 Ω が代数的閉体であるとは, $\Omega[x]$ における定数でないすべての多項式が Ω において根をもつときにいう．例えば, $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のときは, $\overline{K}$ として $\mathbb{C}$ がとれる．一般に, 任意の体に対して, その代数的閉包が必ず存在する (Steinitz の定理).

一方, ある正則行列 $P \in M_n(\overline{K})$ が存在して, $P^{-1}AP$ は A の固有値を対角成分とする上三角行列になる:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\overline{K}). \tag{4}$$

P を列ベクトルによって表示する: $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)$. そうすると, 式 (4) より,

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n) &= A(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n) \\ &= (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \alpha_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $W_i = \overline{K}\boldsymbol{p}_1 + \overline{K}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \overline{K}\boldsymbol{p}_i$ とおく. また, $W_0 = \{\boldsymbol{0}\}$ とおく. P は正則なので, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は $\overline{K}$ 上 1 次独立である. よって,

$$\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n = \overline{K}^n.$$

式 (5) より, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, ある $\boldsymbol{v}_{i-1} \in W_{i-1}$ が存在して,

$$A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{v}_{i-1} \in W_i. \tag{6}$$

これより,

$$(A - \alpha_i E)\boldsymbol{p}_i = A\boldsymbol{p}_i - \alpha_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} \in W_{i-1}. \tag{7}$$

ゆえに, 任意の $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ に対して,

$$\boldsymbol{w}_i = b_1\boldsymbol{p}_1 + b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_i\boldsymbol{p}_i, \quad b_1, b_2, \ldots, b_i \in \overline{K}$$

とおくと, 式 (6), 式 (7) より,

$$\begin{aligned} (A - \alpha_i E)\boldsymbol{w}_i &= (A - \alpha_i E)(b_1\boldsymbol{p}_1 + b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_i\boldsymbol{p}_i) \\ &= (A - \alpha_i E)(b_1\boldsymbol{p}_1 + b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}) + (A - \alpha_i E)b_i\boldsymbol{p}_i \\ &= A(b_1\boldsymbol{p}_1 + b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}) \\ &\qquad - \alpha_i E(b_1\boldsymbol{p}_1 + b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}) + (A - \alpha_i E)b_i\boldsymbol{p}_i \\ &= (b_1A\boldsymbol{p}_1 + b_2A\boldsymbol{p}_2 + \cdots + b_{i-1}A\boldsymbol{p}_{i-1}) \\ &\qquad - (\alpha_i b_1\boldsymbol{p}_1 + \alpha_i b_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + \alpha_i b_{i-1}\boldsymbol{p}_{i-1}) + b_i(A - \alpha_i E)\boldsymbol{p}_i \\ &\in (W_1 + W_2 + \cdots + W_{i-1}) + W_{i-1} + W_{i-1} \subseteq W_{i-1}. \end{aligned}$$

したがって, 任意の $\boldsymbol{x} \in \overline{K}^n = W_n$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(A - \alpha_n E)\boldsymbol{x} &\in W_{n-1}, \\
(A - \alpha_{n-1} E)(A - \alpha_n E)\boldsymbol{x} &\in W_{n-2}, \\
&\cdots\cdots \\
(A - \alpha_1 E)\cdots(A - \alpha_{n-1} E)(A - \alpha_n E)\boldsymbol{x} &\in W_0 = \{\boldsymbol{0}\}.
\end{aligned}
$$

式 (3) と合わせれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in \overline{K}^n$ に対して, $F_A(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 特に,

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とおくと, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $F_A(A)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$ が成り立つから,

$$
\begin{aligned}
F_A(A) &= F_A(A)E = F_A(A)(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n) \\
&= (F_A(A)\boldsymbol{e}_1\ F_A(A)\boldsymbol{e}_2\ \cdots\ F_A(A)\boldsymbol{e}_n) \\
&= (\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{0}\ \cdots\ \boldsymbol{0}) = O.
\end{aligned}
$$

□

[別証] $B(x) = xE - A$ とおく. $F_A(x) = \det B(x)$ であるから, $B(x)$ の余因子行列を $\widetilde{B}(x)$ とすると,

$$
B(x)\widetilde{B}(x) = F_A(x)E. \tag{8}
$$

$\widetilde{B}(x)$ の各成分は, 余因子である[2)]から, x の高々$n-1$ 次の多項式である. よって, x の冪に関して整理すると, ある $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_n(K)$ が存在して,

$$
\widetilde{B}(x) = x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + xB_1 + B_0
$$

と書ける. これを式 (8) に代入すると,

$$
(xE - A)(x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-2}B_{n-2} + \cdots + xB_1 + B_0) = F_A(x)E.
$$

左辺を展開すると,

$$
x^nB_{n-1} + x^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + x(B_0 - AB_1) - AB_0 = F_A(x)E.
$$

さらに, 式 (1) を代入して整理すると,

$$
\begin{aligned}
&x^n(E - B_{n-1}) + x^{n-1}\bigl(c_{n-1}E - (B_{n-2} - AB_{n-1})\bigr) \\
&\qquad + \cdots + x\bigl(c_1E - (B_0 - AB_1)\bigr) + (c_0E + AB_0) = O.
\end{aligned} \tag{9}
$$

[2)]すなわち, $\widetilde{B}(x)$ の (i, j) 成分は, $B(x)$ から第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次の正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたもの.

一般に, 任意の $C_0,\, C_1,\, \ldots,\, C_r \in M_n(K)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
x^r C_r + x^{r-1} C_{r-1} + \cdots + x C_1 + C_0 = O \\
\Rightarrow C_0 = C_1 = \cdots = C_{r-1} = C_r = O.
\end{aligned}
$$

なぜなら, $C_k = (c_{ij}^{(k)})$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, r)$ とおき, $x^r C_r + x^{r-1} C_{r-1} + \cdots + x C_1 + C_0 = O$ とすると, 各 $(i,\, j)$ 成分について,

$$
c_{ij}^{(r)} x^r + c_{ij}^{(r-1)} x^{r-1} + \cdots + c_{ij}^{(1)} x + c_{ij}^{(0)} = 0.
$$

このとき, $c_{ij}^{(r)} = c_{ij}^{(r-1)} = \cdots = c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^{(0)} = 0$.

したがって, 式 (9) より,

$$
\begin{aligned}
B_{n-1} &= E, \\
B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1} E, \\
&\cdots\cdots \\
B_0 - AB_1 &= c_1 E, \\
-AB_0 &= c_0 E
\end{aligned}
$$

が得られる. よって,

$$
\begin{aligned}
F_A(A) &= A^n + c_{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 E \\
&= A^n B_{n-1} + A^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + A(B_0 - AB_1) - AB_0 \\
&= A^n B_{n-1} + (A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1}) + \cdots + (AB_0 - A^2 B_1) - AB_0 \\
&= (A - A)(A^{n-1} B_{n-1} + A^{n-2} B_{n-2} + \cdots + AB_1 + B_0) \\
&= O.
\end{aligned}
$$

□

[例 2] $n = 2$ のときを考える. $A \in M_2(K)$ とし,

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,\, b,\, c,\, d \in K
$$

とおくと, 固有多項式は,

$$
\begin{aligned}
F_A(x) = \det(xE - A) &= \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{vmatrix} \\
&= (x - a)(x - d) - bc \\
&= x^2 - (a + d)x + ad - bc.
\end{aligned}
$$

このとき, Hamilton-Cayley の定理により,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O.$$

なお, $n = 2$ の場合は, 直接計算して確かめることも難しくない.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix}, \\
(a+d)A - (ad-bc)E &= \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+d)a-(ad-bc) & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d-(ad-bc) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2-bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ゆえに, $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$.

[例 3] $A \in M_n(K)$ の固有値が 0 のみならば, A は冪零行列である. このことが, Hamilton-Cayley の定理から直ちに証明される.

実際, A の固有値が 0 のみだとすると, A の固有多項式は $F_A(x) = x^n$. Hamilton-Cayley の定理により, $A^n = O$. したがって, A は冪零行列である.

参考文献

[1] 永田雅宜 (代表著者): 理系のための線型代数の基礎, 紀伊国屋書店, 1986

[2] 三宅敏恒: 入門線形代数, 培風館, 1991