# 有限群の表現

MATHEMATICS.PDF

平成 20 年 4 月 19 日

## 目 次

# 1 群の表現

## 1.1 群の表現

### 1.1.1 群の表現の定義

**[定義 1.1]** $G$ を群とし, $V$ を体 $K$ 上の有限次元線型空間とする. このとき, $G$ から一般線型群 $GL(V)$ への群としての準同型写像 $\rho$ を $G$ の $K$ 上の**表現**といい, $V$ を表現 $\rho$ の**表現空間**という. $V$ の線型空間としての次元を表現 $\rho$ の**次数**といい, $\deg \rho$ で表す. また, 表現 $\rho$ の次数が $n$ であるとき, $\rho$ を $n$ 次表現と呼ぶ.

**[例 1.2]** $V$ を体 $K$ 上の 1 次元線型空間とするとき, 写像 $\rho : G \to GL(V)$ を, 任意の $g \in G$ に対して $\rho(g) = \mathrm{id}_V$ とおくことによって定義すると, $\rho$ は $G$ の $K$ 上の 1 次表現になる. この表現 $\rho$ を**単位表現**という.

**[例 1.3]** $K$ を体とし, $V = K^n$ とすれば, $GL(V) = GL(n, K)$ である. このとき, 群 $G$ から $GL(n, K)$ への準同型写像は $G$ の $K$ 上の表現である.

**[例 1.4]** $K$ が標数 $p > 0$ の体であるとき, $K$ 上の群の表現を**モジュラー表現**という.

**[定義 1.5]** 群 $G$ の表現 $\rho$ が単射であるとき, $\rho$ は**忠実**であるという.

**[例 1.6]** 群 $G$ として一般線型群 $GL(V)$ の部分群をとり,

$$\rho : G \to GL(V), \quad f \mapsto f$$

なる写像を考えれば, $\rho$ は $G$ の忠実な表現である.

### 1.1.2　表現の同値

**[定義 1.7]** 群 $G$ の体 $K$ 上の 2 つの表現 $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ が**同値**であるとは, ある線型同型写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$$

が成り立つときにいう.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

$\rho_1$, $\rho_2$ が同値であることを $\rho_1 \sim \rho_2$ で表す.

**[問題 1]** 表現が同値であるという関係が実際に群 $G$ の体 $K$ 上の表現全体の上での同値関係であることを確かめよ.

### 1.1.3　不変部分空間

**[定義 1.8]** 群 $G$ の表現 $\rho : G \to GL(V)$ に対し, $V$ の部分空間 $W$ が $\rho$-**不変**であるとは, 任意の $g \in G$ に対して

$$\rho(g)W \subseteq W \quad \text{ただし} \quad \rho(g)W = \{(\rho(g))(x) \mid x \in W\}$$

が成り立つときにいう. またこのとき, $W$ を $V$ の $\rho$-**不変部分空間**という.

**[注意 1.9]** $V$ の部分空間 $W$ が $\rho$-不変であることは, 任意 $g \in G$, $x \in V$ に対して

$$x \in W \Rightarrow (\rho(g))(x) \in W$$

が成り立つことと言い換えることができる.

**[例 1.10]** $W = \{0\}$ は常に $\rho$-不変である. これを自明な $\rho$-不変部分空間という.

**[例 1.11]** 表現空間 $V$ 自身は $V$ の $\rho$-不変部分空間である.

**[問題 2]** 任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W \subseteq W$ ならば任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W = W$ であることを証明せよ.

### 1.1.4　不変補空間

**［定義 1.12］** $\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の表現とし, $W$, $W'$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間とする. $W'$ が $W$ の $\rho$-**不変補空間**であるとは,

$$V = W \oplus W'$$

が成り立つときにいう.

**［注意 1.13］** $\rho$-不変補空間は, 一般には存在するとは限らない.

## 1.2　いくつかの表現から構成される表現

### 1.2.1　部分表現

$\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の表現とし, $W$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間とする. $g \in G$ に対して $\rho(g)$ の $W$ への制限を $\rho_W(g)$ とおくと, $W$ が $\rho$-不変であることから $\rho_W(g) \in GL(W)$ となり, $G$ から $GL(W)$ への準同型写像 $\rho_W$ が定まる.

**［定義 1.14］** 上のようにして得られる $G$ の表現 $\rho_W : G \to GL(W)$ を $\rho$ の**部分表現**という.

### 1.2.2　商表現

$\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の表現とし, $W$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間とする. $g \in G$ に対して, 準同型写像

$$\rho_{V/W}(g) : V/W \to V/W, \quad x + W \mapsto (\rho(g))(x) + W$$

が定義できる.

**［定義 1.15］** 上のようにして得られる $G$ の表現 $\rho_{V/W} : G \to GL(V/W)$ を $\rho$ の**商表現**という.

**［注意 1.16］** $W$ を表現空間 $V$ の $\rho$-不変部分空間とする. $W'$ を $W$ の $\rho$-不変補空間とすると, 線型空間として $V \simeq W \oplus W'$ となる. このとき, 商表現 $\rho_{V/W}$ は部分表現 $\rho_{W'}$ と同値になる.

### 1.2.3　表現の和

$G$ を群とし, $K$ を体とする. $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ をそれぞれ $G$ の $K$ 上の表現とする. $V_1$ と $V_2$ との直和 $V_1 \oplus V_2$ を考える. $V_1 \oplus V_2$ の任意の元 $v$ は,

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$$

の形に一意的に表すことができる．このとき

$$(\rho(x))(v) = (\rho_1(x))(v_1) + (\rho_2(x))(v_2)$$

とおくことにより, $G$ の $K$ 上の表現 $\rho : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ が得られる.

**［定義 1.17］** 上のようにして得られる $G$ の表現 $\rho$ を, $\rho_1$, $\rho_2$ の**和**あるいは**直和**といい, $\rho_1 \oplus \rho_2$ で表す.

もっと一般に, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ の和 $\rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_r : G \to GL(V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r)$ も同様にして定義される.

### 1.2.4　表現の積

$G$ を群とし, $K$ を体とする．$\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ をそれぞれ $G$ の $K$ 上の表現とする．$V_1 \otimes V_2$ を線型空間の $K$ 上のテンソル積とする．$x \in G$ に対して $\rho_1(x) \otimes \rho_2(x)$ を線型写像のテンソル積とするとき,

$$\rho(x) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(x)$$

とおくことにより, $G$ の $K$ 上の表現 $\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ が得られる.

**［定義 1.18］** 上のようにして得られる $G$ の表現 $\rho$ を, $\rho_1$, $\rho_2$ の**積**といい, $\rho_1 \times \rho_2$ で表す.

もっと一般に, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ の積 $\rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_r : G \to GL(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_r)$ も同様にして定義される.

### 1.2.5　表現のテンソル積

$G_1$, $G_2$ を群とし, $K$ を体とする．$\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ をそれぞれ $G_1$, $G_2$ の $K$ 上の表現とする．$V_1 \otimes V_2$ を線型空間の $K$ 上のテンソル積とする．$(x, y) \in G_1 \times G_2$ に対して $\rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$ を線型写像のテンソル積とするとき,

$$\rho(x, y) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$$

とおくことにより, $G_1 \times G_2$ の $K$ 上の表現 $\rho : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$ が得られる.

**［定義 1.19］** 上のようにして得られる $G_1 \times G_2$ の表現 $\rho$ を $\rho_1$, $\rho_2$ の**テンソル積**といい, $\rho_1 \otimes \rho_2$ で表す.

もっと一般に, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ のテンソル積 $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_r : G \to GL(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_r)$ も同様にして定義される.

**[注意 1.20]** $G = G_1 = G_2$ のとき, 表現の積 $\rho_1 \times \rho_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ と表現のテンソル積 $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \times G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ とは異なるものである. しかしながら, 表現の積のことをテンソル積と呼んだり, $\rho_1 \times \rho_2$ のことを $\rho_1 \otimes \rho_2$ で表したりしている書籍もあるので, 複数の書籍を参照するときには混同しないように注意する必要がある.

### 1.2.6 反傾表現

$\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする. $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ を $V$ の双対空間とし, 各 $g \in G$ に対して

$$(\rho^*(g))(f) = f \circ (\rho(g^{-1})) \quad (f \in V^*)$$

とおく[1)]と, $\rho^*(g) \in GL(V^*)$ となり, $V^*$ を表現空間とする $G$ の $K$ 上の表現 $\rho^* : G \to GL(V^*)$ が定まる.

**[定義 1.21]** $\rho^*$ を $\rho$ の**反傾表現**という.

## 1.3 表現の既約性

### 1.3.1 既約表現

**[定義 1.22]** 群 $G$ の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が**既約**であるとは, $V$ と $\{0\}$ 以外に $V$ の $\rho$-不変部分空間が存在しないときにいう. 既約でないとき $\rho$ は**可約**であるという.

**[問題 3]** 1 次表現は常に既約であることを示せ.

**[例 1.23]** 有限群 $G_1, G_2$ の直積 $G_1 \times G_2$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現は, $G_1$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現と $G_2$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現のテンソル積として得られる.

**[問題 4]** 既約表現に同値な表現は既約であることを示せ.

**[定理 1.24(Schur の補題)]** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を群 $G$ の 2 つの既約表現とする. ある線型写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在して任意の $g \in G$ に対して

$$f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$$

が成り立てば, $f$ は零写像または同型写像である[2)].

---

[1)] すなわち, $\rho^*(g)$ は $\rho(g)$ の双対写像である.

[2)] $f \neq 0$ のとき 2 つの表現 $\rho_1, \rho_2$ は同値になる.

**［定理 1.25（Ito）］** 有限群 $G$ の正規部分群 $A$ がアーベル群であるとき, $G$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現の次数は $[G:A]$ を割る.

### 1.3.2 絶対既約

$K$ を体, $V$ を $K$ 上の線型空間, $L$ を $K$ の拡大体とする[3)]. このとき, $K$ 上のテンソル積 $L \otimes V$ は $L$ 上の線型空間である. $V^L = L \otimes V$ とおく.

$$V \to V^L, \quad x \mapsto 1 \otimes x$$

は単射な $K$ 上の線型写像である[4)]. この写像により $V \subseteq V^L$ とみなす.

**［定義 1.26］** $V^L$ を $V$ の $L$ への**係数拡大**という.

$\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする. 線型写像のテンソル積 $\mathrm{id}_L \otimes \rho(x)$ を $\rho^L(x)$ とおくと, $\rho^L(x) \in GL(V^L)$ であり, $\rho^L(x)$ の $V$ への制限は $\rho(x)$ に一致する. こうして, $G$ の $L$ 上の表現 $\rho^L : G \to GL(V^L)$ が定まる.

**［定義 1.27］** 群 $G$ の体 $K$ 上の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が**絶対既約**であるとは, 体 $K$ の任意の拡大体 $L$ に対して $\rho^L : G \to GL(V^L)$ が既約であるとき[5)]にいう.

**［注意 1.28］** $\rho$ が既約であっても, 一般には $\rho^L$ が既約であるとは限らない.

**［注意 1.29］** 群 $G$ の体 $K$ 上の表現 $\rho$ が絶対既約であるための必要十分条件は, $K$ を含むある代数的閉体 $\widetilde{K}$ に対して $\rho^{\widetilde{K}}$ が既約になることである. 特に, $K$ が代数的閉体であるとき, $K$ 上の表現が既約であることと絶対既約であることは同値である.

**［例 1.30］** アーベル群の絶対既約表現はすべて 1 次表現である. 特に, アーベル群の代数的閉体上の既約表現はすべて 1 次表現である.

### 1.3.3 完全可約

**［定義 1.31］** 群 $G$ の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が**完全可約**であるとは, 任意の $\rho$-不変部分空間 $W$ に対して $W$ の $\rho$-不変補空間が存在するときにいう.

---

3) $L$ は $K$ 上の線型空間になる.
4) $L$ 上の線型空間は係数を制限して $K$ 上の線型空間とみなせる.
5) $\rho$ 自身が既約であることも条件に含まれる.

**[注意 1.32]** 完全可約な表現 $\rho$ は, 適当ないくつかの既約表現の直和と同値になる.

**[定理 1.33（Maschke の定理）]** $G$ を有限群, $K$ を体とする. $K$ の標数が $G$ の位数を割らないならば, $G$ の $K$ 上の表現は完全可約である. とくに, $G$ の標数 0 の体上の表現は完全可約である.

# 2 群の行列表現

## 2.1 群の表現の行列表示 (1)

$G$ を群, $K$ を体とする. $\rho : G \to GL(V)$ を $G$ の $K$ 上の表現とし, $n$ を $V$ の次元とする. $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ を $\rho$ の表現空間 $V$ の基底とする. $x \in G$ に対して,

$$(\rho(x))(\boldsymbol{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(x)\boldsymbol{b}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

なる関係式によって $n$ 次正方行列

$$R(x) = (r_{ij}(x))$$

が定まり, 群の準同型写像

$$R : G \to GL(n, K), \quad x \mapsto R(x)$$

が定まる.

**[定義 2.1]** $R : G \to GL(n, K)$ を基底 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ に関する $\rho$ の**行列表示**という. また, $R(x)$ を基底 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ に関する $\rho(x)$ の**表現行列**という.

**[注意 2.2]** 上記の定義は, $x$ を固定して考えれば, 線型代数における線型写像の行列表示や表現行列の定義と全く同じである.

**[注意 2.3]** 別の基底 $\boldsymbol{b}'_1$, $\boldsymbol{b}'_2$, ..., $\boldsymbol{b}'_n$ に関する $\rho$ の行列表示 $R'$ を考えると, ある正則行列 $P$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して

$$R'(x) = P^{-1}R(x)P$$

が成り立つ.

ただし, $n = 1$ のときは, $GL(1, K) = K^{\times}$ の積が可換であることから, $R'(x) = R(x)$ となる. つまり, 基底の選び方によらずに行列表示が定まる.

**[問題 5]** 任意の $x$, $y \in G$ に対して $R(xy) = R(x)R(y)$ が成り立つことを証明せよ.

**[問題 6]** 任意の $x \in G$ に対して $R(x)$ は正則行列になることを証明せよ.

**[定理 2.4]** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とし, $R_1$, $R_2$ をそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ の行列表示とする. $\rho_1$, $\rho_2$ が同値な表現であるための必要十分条件は, ある正則行列 $P$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して

$$R_1(x) = P^{-1} R_2(x) P$$

が成り立つことである.

**[注意 2.5]** 上の定理で特に $P$ が単位行列の場合を考えると, 同じ行列表示をもつ群の表現は互いに同値であることがわかる.

## 2.2 群の表現の行列表示 (2)

**[例 2.6]** 1 次表現 $\rho$ の行列表示 $R$ は $G$ から $K^\times$ への準同型写像であり, 任意の $x \in G$ に対して $\rho(x)$ の表現行列 $R(x)$ は $K^\times$ に属する.

**[例 2.7]** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする. $n_1$, $n_2$ をそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ の次元とする. $V_1$ の基底を $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_{n_1}$, $V_2$ の基底を $\boldsymbol{b}'_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}'_{n_2}$ とする. 直和 $V_1 \oplus V_2$ の基底は $V_1$, $V_2$ の基底を並べたものとみなすことができる.

$R_1 : G \to GL(n_1, K)$, $R_2 : G \to GL(n_2, K)$ をそれぞれ上で与えた基底に関する $\rho_1$, $\rho_2$ の行列表示とする. このとき, 和 $\rho_1 \oplus \rho_2$ の $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_{n_1}$, $\boldsymbol{b}'_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}'_{n_2}$ に関する行列表示は

$$G \to GL(n_1 + n_2, K), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} R_1(x) & 0 \\ 0 & R_2(x) \end{pmatrix}$$

となる.

**[定義 2.8]** $n_1$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と $n_2$ 次正方行列 $B$ に対して,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_11}B & a_{n2}B & \cdots & a_{n_1n_1}B \end{pmatrix}$$

によって $n_1n_2$ 次正方行列 $A \otimes B$ を定義する. $A \otimes B$ を行列 $A$, $B$ の **Kronecker 積**という.

**[例 2.9]** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする. $n_1$, $n_2$ をそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ の次元とする. $V_1$ の基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{n_1}$, $V_2$ の基底を $\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_{n_2}$ とする. このとき,

$$\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}'_j \quad (1 \leq i \leq n_1,\, 1 \leq j \leq n_2)$$

は $V_1 \otimes V_2$ の基底である.

$R_1 : G \to GL(n_1, K)$, $R_2 : G \to GL(n_2, K)$ をそれぞれ上で与えた基底に関する $\rho_1$, $\rho_2$ の行列表示とする. このとき, 表現の積 $\rho_1 \times \rho_2$ の上述の $V_1 \otimes V_2$ の基底に関する行列表現は

$$G \to GL(n_1 n_2, K), \quad x \mapsto R_1(x) \otimes R_2(x)$$

となる. ただし, $R_1(x) \otimes R_2(x)$ は行列 $R_1(x)$, $R_2(x)$ の Kronecker 積である.

**[例 2.10]** $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ をそれぞれ群 $G_1$, $G_2$ の体 $K$ 上の表現とする. $n_1$, $n_2$ をそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ の次元とする. $V_1$ の基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{n_1}$, $V_2$ の基底を $\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_{n_2}$ とする. このとき,

$$\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}'_j \quad (1 \leq i \leq n_1,\, 1 \leq j \leq n_2)$$

は $V_1 \otimes V_2$ の基底である.

$R_1 : G_1 \to GL(n_1, K)$, $R_2 : G_2 \to GL(n_2, K)$ をそれぞれ上で与えた基底に関する $\rho_1$, $\rho_2$ の行列表示とする. このとき, 表現のテンソル積 $\rho_1 \otimes \rho_2$ の上述の $V_1 \otimes V_2$ の基底に関する行列表現は

$$G_1 \times G_2 \to GL(n_1 n_2, K), \quad (x, y) \mapsto R_1(x) \otimes R_2(y)$$

となる. ただし, $R_1(x) \otimes R_2(y)$ は行列 $R_1(x)$, $R_2(y)$ の Kronecker 積である.

**[例 2.11]** $\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現, $W$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間, $n$ を $V$ の次元, $r$ を $W$ の次元とする. $W$ の基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ とし, $V$ の基底としては, この $W$ の基底の延長になっているものをとる.

$\rho_W : G \to GL(W)$ を $\rho$ の部分表現とする. 上に述べた $V$, $W$ の基底に関して $\rho$, $\rho_W$ のそれぞれの行列表示 $R : G \to GL(n, K)$, $R_1 : G \to GL(r, K)$ を考える. このとき, 任意の $x \in G$ に対して, ある $n - r$ 次正則行列 $R_2(x)$ が存在して

$$R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) & * \\ 0 & R_2(x) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

**[例 2.12]** $\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現, $W$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間, $n$ を $V$ の次元, $r$ を $W$ の次元とする. $W$ の基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ とし, $V$ の基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ とする. $V$ の基底が $W$ の基底の延長になるようにとることに注意する.

$\rho_{V/W} : G \to GL(V/W)$ を $\rho$ の商表現とする．このとき, $\boldsymbol{b}_{r+1}+W, \ldots, \boldsymbol{b}_n+W$ は $V/W$ の基底になる．これらの基底に関して $\rho$, $\rho_W$ のそれぞれの行列表示 $R : G \to GL(n, K)$, $R_2 : G \to GL(n-r, K)$ を考える．このとき, 任意の $x \in G$ に対して, ある $r$ 次正則行列 $R_1(x)$ が存在して

$$R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) & * \\ 0 & R_2(x) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

**［例 2.13］** $\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とし, $n$ を $V$ の次元とする．$\rho$ が可約であるとき, ある $n$ 次正則行列 $P$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して

$$P^{-1}R(x)P = \begin{pmatrix} R_1(x) & * \\ 0 & R_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表される．ただし, $R_1(x)$, $R_2(x)$ はそれぞれ適当な $r$ 次, $s$ 次の正則行列で,

$$r \geq 1 \quad s \geq 1 \quad r+s=n$$

である.

**［例 2.14］** $\rho : G \to GL(V)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とし, $n$ を $V$ の次元とする．$\rho$ が完全可約であるとき, ある $n$ 次正則行列 $P$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して

$$P^{-1}R(x)P = \begin{pmatrix} R_1(x) & & & 0 \\ & R_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_l(x) \end{pmatrix}$$

のように表される．ただし, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\ldots$, $R_l(x)$ は適当な既約表現 $\rho_1$, $\rho_2$, $\ldots$, $\rho_l$ の行列表示であり,

$$\deg \rho_1 + \deg \rho_2 + \cdots + \deg \rho_l = \deg \rho$$

である.

## 2.3 群の行列表現

**［定義 2.15］** 群 $G$ から $n$ 次正則行列全体からなる群 $GL(n, K)$ への準同型写像を $G$ の**行列表現**という.

**[例 2.16]** 群 $G$ の表現の行列表示は, $G$ の行列表現である.

$G$ を群, $K$ を体, $V$ を体 $K$ 上の $n$ 次元線型空間とする. $G$ の行列表現

$$R : G \to GL(n, K), \quad x \mapsto R(x) = (r_{ij}(x))$$

が与えられたとき, $R$ を行列表示とするような $G$ の表現 $\rho$ は次のようにして構成できる.

$V$ の基底 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ を 1 つ固定すると, 線型同型写像

$$\varphi : K^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1\boldsymbol{b}_1 + a_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{b}_n$$

が定まる. また, $x \in G$ に対して, 線型同型写像

$$f_x : K^n \to K^n, \quad \boldsymbol{x} \mapsto R(x)\boldsymbol{x}$$

が定まる. このとき,

$$\rho(x) = \varphi \circ f_x \circ \varphi^{-1}$$

とおけば, $G$ の $K$ 上の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が定まる.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(x)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & V \\ K^n \arrow[r, "f_x"'] & K^n \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$(\rho(x))(\boldsymbol{b}_j) = (\varphi \circ f_x \circ \varphi^{-1})(\boldsymbol{b}_j).$$

右辺を計算すると,

$$(\rho(x))(\boldsymbol{b}_j) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(x)\boldsymbol{b}_j$$

が得られる. したがって, $\rho(x)$ の基底 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ に関する表現行列は $R(x)$ である.

**[注意 2.17]** 別の基底をとると, $\rho$ と同値な表現が得られる.

## 2.4 誘導表現

$G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $\rho : H \to GL(V)$ を $H$ の体 $K$ 上の表現, $n = \deg \rho$ とする.

$$R : H \to GL(n, K), \quad h \mapsto (r_{ij}(h))$$

を $\rho$ の行列表現とし,

$$G = x_1 H + x_2 H + \cdots + x_r H, \quad r = [G : H]$$

を $G$ の $H$ による左剰余類分解とする. $x \in G$ に対して

$$R^0(x) = \begin{cases} R(x), & x \in H, \\ 0, & x \notin H \end{cases}$$

とおき,

$$R^G(x) = \begin{pmatrix} R^0(x_1^{-1}xx_1) & R^0(x_1^{-1}xx_2) & \cdots & R^0(x_1^{-1}xx_r) \\ R^0(x_2^{-1}xx_1) & R^0(x_2^{-1}xx_2) & \cdots & R^0(x_2^{-1}xx_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^0(x_r^{-1}xx_1) & R^0(x_r^{-1}xx_2) & \cdots & R^0(x_r^{-1}xx_r) \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, 任意の $x,\, y \in G$ に対して

$$R^G(xy) = R^G(x) R^G(y)$$

が成り立ち, $G$ の行列表現

$$R^G : G \to GL(nr, K), \quad x \mapsto R^G(x)$$

が定まる.

**[定義 2.18]** $G$ の行列表現 $R^G : G \to GL(nr, K)$ を $H$ の表現 $\rho$ の**誘導表現**という. 特に, $\rho$ が $1$ 次表現のとき, すなわち $n = \deg \rho = 1$ のとき, $R^G : G \to GL(r, K)$ を**単項表現**という.

## 2.5 ユニタリ表現

**[定義 2.19]** 群 $G$ の行列表現 $R : G \to GL(n, \mathbb{C})$ が**ユニタリ表現**であるとは, すべての $g \in G$ に対して $R(x)$ がユニタリ行列であるときにいう.

**[定理 2.20]** $G$ を有限群とし, $\rho : G \to GL(V)$ を $G$ の $\mathbb{C}$ 上の表現とする. このとき, $V$ 上のある正定値エルミート双線型形式 $B : V \times V \to \mathbb{C}$ が存在して, 任意の $x \in G$ に対して

$$B\big((\rho(x))(u), (\rho(x))(v)\big) = B(u, v) \quad (u,\, v \in V)$$

が成り立つ.

正定値エルミート双線型形式とは, まさに内積のことである. 上の定理は, $V$ がある内積に関して内積空間になり, $\rho(x)$ がその内積空間におけるユニタリ変換になる, ということを主張している.

ユニタリ変換の正規直交基底による表現行列はユニタリ行列である．また, 内積空間には必ず正規直交基底が存在する．実際, Gram-Schmidt の正規直交化法により, 任意の与えられた基底から正規直交基底を構成することができる．

以上より, 次の定理が得られる．

**［定理 2.21］** 有限群 $G$ の $\mathbb{C}$ 上の任意の表現 $\rho$ に対して, ユニタリ表現であるような $\rho$ の行列表示が存在する．

**［注意 2.22］** $G$ が有限群でない場合には, 上の定理が一般には成り立たないことが知られている．

# 3　置換表現

## 3.1　置換表現 (1)

$G$ を群, $\Omega$ を集合とし, $S(\Omega)$ を集合 $\Omega$ 上の置換全体[6)]とする．

**［定義 3.1］** $G$ から $S(\Omega)$ への準同型写像を, $G$ の $\Omega$ における**置換表現**という．また, 置換表現は単射であるとき**忠実**であるという．

$T : G \times \Omega \to \Omega$ を群 $G$ の集合 $\Omega$ への作用とするとき, 各 $a \in G$ に対して写像

$$\rho(a) : \Omega \to \Omega, \quad x \mapsto T(a, x)$$

を定めると, $\rho(a)$ は全単射であり, $\rho(a)^{-1}$ の逆写像は $\rho(a^{-1})$ である．すなわち, $\rho(a)$ は $\Omega$ 上の置換である．こうして, $G$ の $\Omega$ における置換表現 $\rho : G \to S(\Omega)$ が定まる．

逆に, $\rho : G \to S(\Omega)$ を $G$ の $\Omega$ における置換表現とするとき,

$$T(a, x) = (\rho(a))(x)$$

によって $G$ の $\Omega$ への作用 $T : G \times \Omega \to \Omega$ を定義することができる．

**［例 3.2］** $G$ を群とする．$a \in G$ に対して, $G$ 上の置換 $\rho(a) : G \to G$ を $(\rho(a))(x) = ax$ によって定義すれば, $G$ の $G$ における忠実な置換表現 $\rho : G \to S(G)$ が定まる．この置換表現を**左正則表現**という．

**［例 3.3］** $G$ を群とする．$a \in G$ に対して, $G$ 上の置換 $\rho(a) : G \to G$ を $(\rho(a))(x) = xa^{-1}$ によって定義すれば, $G$ の $G$ における忠実な置換表現 $\rho : G \to S(G)$ が定まる．この置換表現を**右正則表現**という．

[6)] すなわち, $\Omega$ から $\Omega$ 自身への全単射の全体.

**[例 3.4]** $G$ を群, $N$ を $G$ の正規部分群とする. $a \in G$ に対して, $N$ 上の置換 $\rho(a): N \to N$ を $(\rho(a))(x) = axa^{-1}$ によって定義すれば, $G$ の $N$ における置換表現 $\rho: G \to S(N)$ が定まる.

**[例 3.5]** $G$ を群, $H$ を $G$ の部分群. $G/H$ を $G$ の $H$ に関する左剰余類全体の集合とする. $a \in G$ に対して, $G/H$ 上の置換 $\rho(a): G/H \to G/H$ を $(\rho(a))(xH) = axH$ によって定義すれば, $G$ の $G/H$ における置換表現 $\rho: G \to S(G/H)$ が定まる.

**[例 3.6]** $G$ を群, $H$ を $G$ の部分群. $H\backslash G$ を $G$ の $H$ に関する右剰余類全体の集合とする. $a \in G$ に対して, $H\backslash G$ 上の置換 $\rho(a): H\backslash G \to H\backslash G$ を $(\rho(a))(Hx) = Hxa^{-1}$ によって定義すれば, $G$ の $H\backslash G$ における置換表現 $\rho: G \to S(H\backslash G)$ が定まる.

## 3.2 置換表現 (2)

$\Omega = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を $n$ 個の元からなる集合とする.

$V$ を体 $K$ 上の $n$ 次元線型空間とし, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を $V$ の基底とする. $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とおくとき, 集合としての全単射

$$f: \Omega \to \mathcal{B}, \quad u_i \mapsto \boldsymbol{b}_i$$

が存在する.

群 $G$ が $\Omega$ に作用しているとし, その作用を $T: G \times \Omega \to \Omega$ とおく. 各 $\sigma \in G$ に対して, 写像

$$t_\sigma: \Omega \to \Omega, \quad u \to T(\sigma, u)$$

は $\Omega$ 上の置換である. $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$ に対して $\boldsymbol{b}^\sigma = f \circ t_\sigma \circ f^{-1}(\boldsymbol{b})$ とおくと, $\mathcal{B}$ 上の置換

$$\mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{b}^\sigma$$

が定まる. この写像を $V$ へ拡張して, 線型同型写像

$$\rho(\sigma): V \to V, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i^\sigma, \quad (a_i \in K)$$

が定義できる. これにより, 準同型写像 $\rho: G \to GL(V)$ が定まる. すなわち, $\rho$ は群 $G$ の $K$ 上の表現である.

**[定義 3.7]** 上のようにして定まる $G$ の表現 $\rho: G \to GL(V)$ を, 作用 $T$ から得られる $G$ の**置換表現**という.

逆に, 群 $G$ の表現 $\rho: G \to GL(V)$ が与えられたとする. 各 $\sigma \in G$ に対して, $\rho(\sigma)$ を $\mathcal{B}$ に制限したものは $\mathcal{B}$ 上の置換であり,

$$G \times \Omega \to \Omega, \quad u \mapsto f^{-1} \circ \rho(\sigma) \circ f(u)$$

は $G$ の $\Omega$ への作用である. このとき, 作用 $T$ から得られる $G$ の置換表現は $\rho$ に一致する.

**［例 3.8］** $G$ を有限群とする．$\Omega = G$, $T(a,x) = ax$ とおくことによって得られる $G$ の置換表現を $G$ の**左正則表現**という．

**［例 3.9］** $G$ を有限群とする．$\Omega = G$, $T(a,x) = xa^{-1}$ とおくことによって得られる $G$ の置換表現を $G$ の**右正則表現**という．

**［例 3.10］** $G$ を有限群, $N$ を $G$ の正規部分群とする．$\Omega = N$, $T(a,x) = axa^{-1}$ とおくことによって $G$ の置換表現が得られる．

**［例 3.11］** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $G/H$ を $G$ の $H$ に関する左剰余類全体の集合とする．$\Omega = G/H$, $T(a,x) = axH$ とおくことによって $G$ の置換表現が得られる．

**［例 3.12］** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $G\backslash H$ を $G$ の $H$ に関する右剰余類全体の集合とする．$\Omega = G\backslash H$, $T(a,x) = Hxa^{-1}$ とおくことによって $G$ の置換表現が得られる．

## 3.3 置換行列

**［定義 3.13］** 各行各列に 1 がただ 1 つだけ現れ, 他の成分はすべて 0 であるような正方行列を**置換行列**という．

**［例 3.14］** 3 次の置換行列は以下の 6 つである．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**［注意 3.15］** 置換行列は正則行列である．$n$ 次置換行列の全体は群になり, $n$ 次対称群 $S_n$ に同型である．

$G$ を群とし, $\rho : G \to GL(V)$ を置換表現とする．$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ を $\rho$ の表現空間 $V$ の基底とし, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とおく．

$\sigma \in G$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$ に対して $\boldsymbol{b}^\sigma = (\rho(\sigma))(\boldsymbol{b})$ とおく．各 $\sigma \in G$ に対して

$$r_{ij}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_j^\sigma \text{ のとき}, \\ 0, & \boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{b}_j^\sigma \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき, $R(\sigma) = (r_{ij}(\sigma))$ とおくと, $R(\sigma)$ は置換行列である．このとき, $R : G \to GL(n, K)$ は $\rho$ の行列表示である．

**［例 3.16］** $G$ が $n$ 個の元からなる有限群であり, $\rho$ が $G$ の左正則表現である場合を考える．

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

とおく．$G$ と $\mathcal{B}$ との間には $a_i \mapsto \boldsymbol{b}_i$ なる対応によって全単射が定まる．このとき, 各 $a \in G$ に対して

$$r_{ij}(a) = \begin{cases} 1, & a_i = a a_j \text{ のとき}, \\ 0, & a_i \neq a a_j \text{ のとき} \end{cases}$$

である．とくに, $a \neq 1$ のとき, $R(a) = (r_{ij}(a))$ の対角成分はすべて $0$ である．

# 4　有限群の複素数体上の表現の指標

この節では, 有限群 $G$ の複素数体 $\mathbb{C}$ 上の表現を考える．

## 4.1　群の表現の指標

$G$ を有限群, $V$ を有限次元複素線型空間とし, $\rho : G \to GL(V)$ を $G$ の $\mathbb{C}$ 上の表現とする．

**［定義 4.1］** 表現 $\rho$ に対して定まる複素数値関数

$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \operatorname{Tr} \rho(g)$$

を $\rho$ の**指標**あるいは**群指標**という．また, $\chi$ の**次数**とは $\rho$ の次数[7] $\deg \rho$ のことであるとする．

**［例 4.2］** 単位表現の指標を**単位指標**という．単位表現の指標 $\chi$ は, 任意の $g \in G$ に対して $\chi(g) = 1$ であるような関数である．

**［例 4.3］** 有限群 $G$ の表現 $\rho : G \to GL(V)$ を $G$ の部分群 $H$ に制限して得られる $H$ の表現の指標は, $\rho$ の指標 $\chi$ の $H$ への制限に一致する．

[7] すなわち表現空間 $V$ の次元．

**[例 4.4]** $\rho$, $\rho'$ を群 $G$ の $\mathbb{C}$ 上の表現とし, $\chi$, $\chi'$ をそれぞれ $\rho$, $\rho'$ の指標する. このとき,

$$\chi + \chi' : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \chi(g) + \chi'(g),$$
$$\chi\chi' : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \chi(g)\chi'(g)$$

はそれぞれ $\rho \oplus \rho'$, $\rho \times \rho'$ の指標である.

**[例 4.5]** $\rho$, $\rho'$ を群 $G_1$, $G_2$ の $\mathbb{C}$ 上の表現とし, $\chi$, $\chi'$ をそれぞれ $\rho$, $\rho'$ の指標する. このとき,

$$\chi \otimes \chi' : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}, \quad (g_1, g_2) \mapsto \chi(g_1)\chi'(g_2)$$

は $\rho \otimes \rho'$ の指標である.

**[例 4.6]** 有限群 $G$ の左正則表現の指標を $\chi$ とすると,

$$\chi(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \text{ のとき}, \\ 0, & g \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ.

**[注意 4.7]** $\rho$ を有限群 $G$ の表現, $n = \deg \rho$ とし, $\chi$ を $\rho$ の指標とする. $E_n$ を $n$ 次単位行列とすれば,

$$\chi(1) = \operatorname{Tr} \rho(1) = \operatorname{Tr} E_n = n.$$

すなわち, $\chi(1)$ は $\rho$ の次数を表す.

**[問題 7]** $\chi$ を有限群 $G$ の表現の指標とすると, 任意の $g \in G$ に対して $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ が成り立つことを示せ.

**[問題 8]** 有限群 $G$ の 1 次指標 $\chi$ は $G$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像であることを示せ.

**[注意 4.8]** 逆に, $G$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像はすべて, $G$ の $\mathbb{C}$ 上のある 1 次表現の指標である.

**[定理 4.9]** 有限群 $G$ の 2 つの表現が同値であるための必要十分条件は, それらの指標が一致することである.

**[問題 9]** 有限群 $G$ の同値な 2 つの表現の指標は一致することを示せ.

## 4.2 行列表現の指標

$G$ を有限群とし, $R : G \to GL(n, \mathbb{C})$ を $G$ の行列表現とする.

**[定義 4.10]** 行列表現 $R$ に対して定まる複素数値関数

$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \operatorname{Tr} R(x)$$

を $R$ の**指標**あるいは**群指標**という.

**[注意 4.11]** 有限群 $G$ の行列表現 $R : G \to GL(n, \mathbb{C})$ が, 群の $\mathbb{C}$ 上のある表現 $\rho : G \to GL(V)$ の行列表示であれば, 行列表現 $R$ の指標は群の表現 $\rho$ の指標に一致する.

**[注意 4.12]** $n = 1$ のとき, 任意の $x \in G$ に対して $\operatorname{Tr} R(x) = R(x)$ であるから, $R$ の指標は $R$ 自身である.

## 4.3 既約指標

**[定義 4.13]** 指標 $\chi$ が**既約**であるとは, ある既約表現 $\rho$ が存在して $\chi$ が $\rho$ の指標であるときにいう. また, 既約表現の指標を**既約指標**という.

**[例 4.14]** 1 次表現は常に既約であるから, 1 次指標も常に既約である.

**[例 4.15]** $G_1$, $G_2$ を有限群, $\rho$, $\rho'$ をそれぞれ $G_1$, $G_2$ の既約表現とし, $\chi$, $\chi'$ をそれぞれ $\rho$, $\rho'$ の指標とする. このとき, 表現のテンソル積 $\rho \otimes \rho'$ は $G_1 \times G_2$ の既約表現であり,

$$\chi \otimes \chi' : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}, \quad (g_1, g_2) \mapsto \chi(g_1)\chi'(g_2)$$

は $\rho \otimes \rho'$ の指標である.

**[定理 4.16]** $G_1$, $G_2$ を有限群とし, $\chi_1$, $\chi_2$, $\ldots$, $\chi_l$ を $G_1$ の既約指標の全体, $\chi'_1$, $\chi'_2$, $\ldots$, $\chi'_{l'}$ を $G_2$ の既約指標の全体とする. このとき,

$$\chi_i \otimes \chi'_j : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}, \quad (g_1, g_2) \mapsto \chi_i(g_1)\chi'_j(g_2) \quad (1 \leq i \leq l,\, 1 \leq j \leq l')$$

が $G_1 \times G_2$ の既約指標の全体になる.

**[定理 4.17]** 有限群 $G$ の相異なる既約指標の個数は $G$ の共役類の個数に等しい.

**[定理 4.18]** $G$ を有限群, $D(G)$ をその交換子群とする．このとき, $G$ のすべての 1 次指標は, アーベル群 $G/D(G)$ の既約指標 $\chi_0$ と標準的な準同型写像 $\pi : G \to G/D(G)$ との合成 $\chi_0 \circ \pi$ として得られる.

**[定理 4.19]** $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l$ を有限群 $G$ の既約指標の全体とする．このとき,

$$\chi_1(1)\chi_1(g) + \cdots + \chi_l(1)\chi_l(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \text{ のとき}, \\ 0, & g \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ.

## 4.4 複素数値関数の内積

$G$ で定義された複素数値関数の全体を $\mathbb{C}(G)$ とおく．$\varphi, \psi \in \mathbb{C}(G)$ に対して, $\varphi + \psi, \varphi\psi \in \mathbb{C}(G)$ を

$$\varphi + \psi : G \to C, \quad g \mapsto \varphi(g) + \psi(g),$$
$$\varphi\psi : G \to C, \quad g \mapsto \varphi(g)\psi(g)$$

なる写像とする．また, $\varphi \in \mathbb{C}(G)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, $c\varphi \in \mathbb{C}(G)$ を

$$c\varphi : G \to C, \quad g \mapsto c \cdot \varphi(g)$$

なる写像とする．$\varphi + \psi$, $\varphi\psi$, $c\varphi$ をそれぞれ和, 積, スカラー倍とすることによって, 複素数値関数の全体 $\mathbb{C}(G)$ は $\mathbb{C}$ 上の多元環になる．したがって特に, $\mathbb{C}(G)$ は和とスカラー倍について複素線型空間になる.

**[定義 4.20]** $G$ を有限群とする．$G$ で定義された複素数値関数 $\varphi, \psi$ に対して, **内積** $(\varphi \mid \psi)$ を

$$(\varphi \mid \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

によって定義する.

実際に, $(* \mid *) : \mathbb{C}(G) \times \mathbb{C}(G) \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}(G)$ 上の正定値エルミート双線型形式になる.

$\varphi, \psi \in \mathbb{C}(G)$ に対して,

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\psi(g^{-1})$$

とおくと, $\langle *, * \rangle : \mathbb{C}(G) \times \mathbb{C}(G) \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}(G)$ 上の非退化対称双線型形式になる．$\varphi, \psi$ が $G$ における指標ならば,

$$(\varphi \mid \psi) = \langle \varphi \mid \psi \rangle$$

が成り立つ[8].

[8] 任意の $g \in G$ に対して $\psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1} = \overline{\psi(g)}$ であるから.

**[定義 4.21]** 有限群 $G$ で定義された複素数値関数 $\varphi, \psi$ が**直交する**とは, $(\varphi \mid \psi) = 0$ が成り立つときにいう.

## 4.5　指標の直交関係

**[定理 4.22（指標の第 1 直交関係）]** $\chi_1, \chi_2$ をそれぞれ有限群 $G$ の既約表現 $\rho_1, \rho_2$ の指標とするとき,

$$(\chi_1 \mid \chi_2) = \begin{cases} 0, & \rho_1 \not\sim \rho_2, \\ 1, & \rho_1 \sim \rho_2. \end{cases}$$

**[定理 4.23（指標の第 2 直交関係）]** $\chi_1, \ldots, \chi_l$ を有限群 $G$ の既約指標の全体, $K_1, K_2, \ldots, K_t$ を $G$ の共役類の全体, $g_1, g_2, \ldots, g_t$ を共役類の完全代表系とする. このとき

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{l} \chi_i(g_u)\overline{\chi_i(g_v)} = \begin{cases} 0, & g_u \text{ と } g_v \text{ が共役でないとき}, \\ 1/|K_u|, & g_u \text{ と } g_v \text{ が共役のとき}. \end{cases}$$

**[注意 4.24]** 有限群 $G$ の既約指標の個数と $G$ の共役類の個数とは等しいことが知られているので, 上の定理において, 実際は $l = t$ である.

**[注意 4.25]** $Z(g_u)$ を $g_u$ の $G$ における中心化群[9] とすると,

$$|K_u| = (G : Z(g_u)) = \frac{|G|}{|Z(g_u)|}$$

が成り立つ. これを用いて指標の第 2 直交関係の主張を書き換えれば,

$$\sum_{i=1}^{l} \chi_i(g_u)\overline{\chi_i(g_v)} = \begin{cases} 0, & g_u \text{ と } g_v \text{ が共役でないとき}, \\ |Z(g_u)|, & g_u \text{ と } g_v \text{ が共役のとき}. \end{cases}$$

となる.

## 4.6　既約分解

$\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(1 \leq i \leq h)$ を $G$ の互いに同値でない既約表現の全体とする[10]. $\rho_i : G \to GL(V)$ を $G$ の任意の表現とするとき, Maschke の定理により有限群 $G$ の $\mathbb{C}$ 上の表現は完全可約であるから, $\rho$ はいくつかの既約表現の和に分解される. このとき, $\rho$ は

$$\underbrace{\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_1}_{m_1} \oplus \underbrace{\rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_2}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\rho_h \oplus \cdots \oplus \rho_h}_{m_h}$$

[9] $Z(g_u) = \{x \in G \mid xg_u = g_u x\}$.

[10] 既約表現に同値な表現もまた既約であることに注意する.

と同値である．このことを

$$\rho \sim m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + \cdots + m_h\rho_h$$

と表し，これを $\rho$ の**既約分解**という．$\rho_i$ を $\rho$ の**既約成分**という．また，$m_i$ を $\rho$ における $\rho_i$ の**重複度**という．さらにこのとき，$\rho$ の指標を $\chi$, $\rho_i$ の指標を $\chi_i$ とすると，

$$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_h\chi_h$$

と書き表される．これを $\chi$ の**既約分解**という．また，

$$m_i = (\chi \mid \chi_i) \quad (1 \leq i \leq h)$$

が成り立つ．$m_i$ を $\chi$ の**重複度**ということがある．$m_i > 0$ のとき，$\chi_i$ を $\chi$ の**既約成分**という．

**［問題 10］** 有限群 $G$ の 2 つの表現 $\rho$, $\rho'$ の指標をそれぞれ $\chi$, $\chi'$ とする．既約分解を用いて，$\chi = \chi'$ ならば $\rho \sim \rho'$ を示せ．

## 4.7　類関数

**［定義 4.26］** 有限群 $G$ で定義された複素数値関数 $\varphi$ が**類関数**であるとは，任意の $g$, $h \in G$ に対して

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

が成り立つときにいう．

有限群 $G$ の同じ共役類に属する元について，その類関数による値は一定である．

**［例 4.27］** 定数関数[11)]は類関数である．

**［問題 11］** 指標は類関数であることを確かめよ．

$G$ で定義された類関数の全体を $\mathrm{Cl}(G)$ とおく．$\mathrm{Cl}(G)$ は，$G$ で定義された複素数値関数全体からなる内積空間 $\mathbb{C}(G)$ の部分空間になる．

**［問題 12］** $\mathrm{Cl}(G)$ の複素線型空間としての次元は有限群 $G$ の共役類の個数に一致することを示せ．

**［定理 4.28］** $G$ の既約指標の全体は $\mathrm{Cl}(G)$ の正規直交基底である．

[11)] すなわち，任意の $g \in G$ に対して一定の値をとる関数．

$\chi_1, \ldots, \chi_l$ を既約指標の全体とする．任意の類関数 $\varphi$ は

$$\varphi = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_l\chi_l, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

の形に表すことができ，

$$a_i = (\varphi \mid \chi_i)$$

が成り立つ．さらに，もう 1 つの類関数 $\psi$ が

$$\psi = b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + \cdots + b_l\chi_l, \quad b_i \in \mathbb{C}$$

と表されるとき，

$$(\varphi \mid \psi) = \sum_{i=1}^{l} a_i\overline{b_i}$$

となる．

### 4.8 一般指標

$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l$ を既約指標の全体とする．

**［定義 4.29］** 有限群 $G$ の既約指標の整数係数の 1 次結合を $G$ の**一般指標**という．すなわち，

$$m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_l\chi_l, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

と表わされるものを一般指標という．

$G$ の一般指標は $G$ で定義された類関数である．また，一般指標 $\chi$ について，$\chi$ が指標であることと $\chi$ が既約指標の負でない整数係数の 1 次結合で表されることとは同値である．特に，指標は一般指標である．

$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Z}}(G)$ を一般指標の全体とすると，$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Z}}(G)$ の 2 つの元

$$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_l\chi_l,$$
$$\chi' = m'_1\chi_1 + m'_2\chi_2 + \cdots + m'_l\chi_l$$

に対して，

$$\chi + \chi' = \sum_{i=1}^{l}(m_i + m'_i)\chi_i, \quad \chi\chi' = \sum_{i,j} m_i m'_j \chi_i\chi_j$$

をそれぞれ和，積として，$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Z}}(G)$ は環になる．しかも，$\chi_i\chi_j = \chi_j\chi_i$ が成り立つ[12) ]ので，$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Z}}(G)$ は可換環になる．

**［定義 4.30］** $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Z}}(G)$ を $G$ の**指標環**という．

---

[12)] 2 つの群の表現 $\rho_1, \rho_2$ に対して，2 つの積 $\rho_1 \times \rho_2$ と $\rho_2 \times \rho_1$ とは同値であるから．

**［定理 4.31］** $\chi$ を有限群 $G$ の一般指標とするとき, $\chi$ が既約指標であるための必要十分条件は, $\chi$ について $(\chi \mid \chi) = 1$ かつ $\chi(1) > 0$ が成り立つことである.

**［定義 4.32］** 有限群 $G$ の部分群 $H$ が素数 $p$ に関する**基本部分群**であるとは, $H$ が $p$ 群[13)] と巡回群との直積になっているときにいう.

**［定理 4.33（Brauer の指標定理）］** 有限群 $G$ の類関数 $\varphi$ が一般指標であるための必要十分条件は, $G$ の任意の基本部分群 $E$ に対して $\varphi$ の $E$ への制限が $E$ の一般指標になることである.

## 4.9 誘導関数

$G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とする. $\mathbb{C}(G)$, $\mathbb{C}(H)$ をそれぞれ $G$, $H$ で定義された複素数値関数全体からなる線形空間とし, $\mathrm{Cl}(G)$, $\mathrm{Cl}(H)$ をそれぞれ $G$, $H$ で定義された類関数全体からなる $\mathbb{C}(G)$, $\mathbb{C}(H)$ の部分空間とする.

$\psi \in \mathbb{C}(H)$, $x \in G$ に対して

$$\psi^0(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in H, \\ 0, & x \notin H \end{cases}$$

とおき,

$$\psi^G(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \psi^0(y^{-1}xy)$$

とおくと, $\psi^G \in \mathbb{C}(G)$ が得られる. 特に, $\psi \in \mathrm{Cl}(H)$ ならば $\psi^G \in \mathrm{Cl}(G)$ である.

**［定義 4.34］** $\psi \in \mathrm{Cl}(H)$ とするとき, $\psi^G \in \mathrm{Cl}(G)$ を $\psi$ の $G$ における**誘導関数**という.

$\mathbb{C}(G)$, $\mathbb{C}(H)$ の内積をそれぞれ $(*, *)_G$, $(*, *)_H$ で表すことにする. すなわち, $\varphi$, $\psi \in \mathbb{C}(G)$ とするとき,

$$(\varphi \mid \psi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)}.$$

また, $\varphi$, $\psi \in \mathbb{C}(H)$ とするとき,

$$(\varphi \mid \psi)_H = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(x)\overline{\psi(x)}.$$

**［定理 4.35（Frobenius の相互律）］** 任意の $\varphi \in \mathrm{Cl}(G)$, $\psi \in \mathrm{Cl}(H)$ に対して

$$(\varphi_H \mid \psi)_H = (\varphi \mid \psi^G)_G$$

が成り立つ. ただし, $\varphi_H$ は $\varphi$ の $H$ への制限である.

13) 位数が素数 $p$ のベキであるような群を $p$ 群という.

## 4.10 例外指標

$G$ を群とするとき, $x \in S$ と $G$ の部分集合 $S$ に対して

$$S^x = x^{-1}Sx = \{x^{-1}sx \mid s \in S\}$$

とおく. さらに,

$$N_G(S) = \{x \in G \mid S^x = S\}$$

とおく. $N_G(S)$ は $G$ の部分群になる[14].

**[定義 4.36]** 有限群 $G$ の部分集合 $S$ が **TI 集合**[15]であるとは, 任意の $x \in G \setminus N_G(S)$ に対して,

- $S \cap S^x = \{1\}$.
- $S \cap S^x = \emptyset$.

のどちらか一方の条件が成り立つときにいう.

**[定理 4.37 (Brauer-Suzuki)]** $G$ を有限群, $S$ を $G$ の TI 集合とする. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_w$ は $N_G(S)$ の異なる指標で

- $\xi_1(1) = \xi_2(1) = \cdots = \xi_w(1)$.
- 任意の $x \in N_G(S) \setminus S$ に対して $\xi_i(x) = \xi_j(x)$ $(1 \le i \le w,\ 1 \le j \le w)$.

なる条件を満たすものとする. このとき, $G$ の既約指標 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_w$ と $\varepsilon = \pm 1$ が存在して

$$(\xi_i - \xi_j)^G = \varepsilon(\xi_i - \xi_j) \quad (1 \le i \le w,\ 1 \le j \le w)$$

が成り立つ. ただし, $(\xi_i - \xi_j)^G$ は $\xi_i - \xi_j$ の誘導関数である.

**[定義 4.38]** 上の定理で得られる $G$ の既約指標 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_w$ を $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_w$ に対応する**例外指標**という.

例外指標は, 有限群 $G$ の部分群の既約指標に対して $G$ の適当な既約指標を対応させる手段である. このような手段は, $G$ の構造を調べる上で有効である. 実際, 例外指標の理論を応用して, 奇数位数の群は可解群であるという Feit-Thompson の定理をはじめ, 有限群論において多くの成果が得られている.

[14] $N_G(S)$ は $S$ の正規化群と呼ばれるものである.
[15] TI は Trivial Intersection を表す.

# 5　既約指標の計算例

## 5.1　$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の既約指標

$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする．アーベル群の共役類はすべて 1 元集合なので,

$$\{0 + 2\mathbb{Z}\}, \quad \{1 + 2\mathbb{Z}\}$$

が $G$ の共役類の全体である．一般に, 有限群の既約指標の個数はその群の共役類の個数に一致する．よって $G$ の既約指標の個数は 2 である．

$G$ の既約指標を $\chi_1$, $\chi_2$ とおく．まず, 単位指標は既約指標である．$\chi_1$ が単位指標であるとしても一般性を失わない．よって,

$$\chi_1(0 + 2\mathbb{Z}) = \chi_1(1 + 2\mathbb{Z}) = 1.$$

次に, 定理 4.19 より,

$$\chi_1(0 + 2\mathbb{Z})^2 + \chi_2(0 + 2\mathbb{Z})^2 = |G| = 2.$$

単位元における指標の値は正の整数なので,

$$\chi_2(0 + 2\mathbb{Z}) = 1.$$

再び定理 4.19 より,

$$0 = \chi_1(0 + 2\mathbb{Z})\chi_1(1 + 2\mathbb{Z}) + \chi_2(0 + 2\mathbb{Z})\chi_2(1 + 2\mathbb{Z}) = 1 + \chi_2(1 + 2\mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$\chi_2(1 + 2\mathbb{Z}) = -1.$$

以上より, 指標表は次のようになる．

| | $\{0 + 2\mathbb{Z}\}$ | $\{1 + 2\mathbb{Z}\}$ |
|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | $-1$ |

## 5.2　$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の既約指標

$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする．アーベル群の共役類はすべて 1 元集合なので,

$$K_{u,v} = \{(u + 2\mathbb{Z},\, v + 2\mathbb{Z})\} \quad (u = 0, 1;\, v = 0, 1)$$

が $G$ の共役類の全体である．

§ 5.1 より, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ においては 2 つの既約指標

$$\chi_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad x + 2\mathbb{Z} \mapsto 1,$$
$$\chi_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad x + 2\mathbb{Z} \mapsto (-1)^x$$

が得られる．このとき, $G$ の既約指標の全体は

$$\chi_i \otimes \chi_j \quad (i = 0, 1;\ j = 0, 1)$$

である．ただし, 任意の $(u + 2\mathbb{Z},\ v + 2\mathbb{Z}) \in G$ に対して

$$\chi_i \otimes \chi_j(u + 2\mathbb{Z},\ v + 2\mathbb{Z}) = \chi_i(u + 2\mathbb{Z})\chi_j(v + 2\mathbb{Z}).$$

それぞれの値を計算すると, 指標表は次のようになる．

| | $K_{0,0}$ | $K_{0,1}$ | $K_{1,0}$ | $K_{1,1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1 \otimes \chi_1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $\chi_1 \otimes \chi_2$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |
| $\chi_2 \otimes \chi_1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_2 \otimes \chi_2$ | $1$ | $-1$ | $-1$ | $1$ |

### 5.3 $S_3$ の既約指標

$S_3$ の共役類は,

$$\begin{aligned} &K_1 = \{(1)\}, \quad K_2 = \{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3)\}, \\ &K_3 = \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\} \end{aligned}$$

の 3 個である．よって $S_3$ は 3 個の既約指標をもつ．各々の指標 $\chi$ の共役類 $K_i$ の元での値を $\chi_i(K_j)$ と書くことにする．

$S_3$ の交換子群は $A_3$ であり, $S_3/A_3 = \{A_3,\ (1\ 2)A_3\}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に群として同型である．その同型写像を $f : S_3/A_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とおくことにする．一方, § 5.1 より, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ においては 2 つの既約指標

$$\begin{aligned} &\chi_1' : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad x + 2\mathbb{Z} \mapsto 1, \\ &\chi_2' : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad x + 2\mathbb{Z} \mapsto (-1)^x \end{aligned}$$

が得られる．定理 4.18 より, $\pi : S_3 \to S_3/A_3$ を標準的な準同型写像とすると, $S_3$ のすべての 1 次指標は

$$\chi_1 = \chi_1' \circ f \circ \pi, \quad \chi_2 = \chi_2' \circ f \circ \pi$$

である．これらの値を計算すると,

$$\begin{aligned} &\chi_1(K_1) = \chi_1(K_2) = \chi_1(K_3) = 1, \\ &\chi_2(K_1) = \chi_2(K_3) = 1, \quad \chi_2(K_2) = -1. \end{aligned}$$

さらに, 定理 4.19 より,

$$\chi_1(K_1)^2 + \chi_2(K_1)^2 + \chi_3(K_1)^2 = |S_3| = 6.$$

単位元における指標の値は正の整数なので,

$$\chi_3(K_1) = 2.$$

再び定理 4.19 より,

$$\chi_1(K_1)\chi_1(K_2) + \chi_2(K_1)\chi_2(K_2) + \chi_3(K_1)\chi_3(K_2) = 0,$$
$$\chi_1(K_1)\chi_1(K_3) + \chi_2(K_1)\chi_2(K_3) + \chi_3(K_1)\chi_3(K_3) = 0.$$

よって,

$$1 + (-1) + 2 \cdot \chi_3(K_2) = 0,$$
$$1 + 1 + 2 \cdot \chi_3(K_3) = 0.$$

ゆえに,

$$\chi_3(K_2) = 0, \quad \chi_3(K_3) = -1.$$

以上より, 指標表は次のようになる.

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | $-1$ | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | 0 | $-1$ |

## 5.4　有限巡回群の既約指標

$G$ を位数 $n$ の巡回群とし, $a$ を $G$ の生成元とすると,

$$G = \{a^i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

と表せる.

一般に, アーベル群の $\mathbb{C}$ 上の既約表現はすべて次数が 1 である. したがって, $G$ の既約表現はすべて 1 次である. また, 一般にアーベル群の共役類はすべて 1 元集合なので, $G$ の共役類は

$$K_i = \{a^i\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

の $n$ 個である. したがって既約指標の個数は $n$ である.

1 の原始 $n$ 乗根の 1 つを $\zeta$ とする. このとき,

$$\chi_k(a^i) = \zeta^{ki} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

によって $n$ 個の準同型写像 $\chi_k : G \to \mathbb{C}^\times$ が定まる. これらは必ず $G$ のある 1 次表現の指標になっている. そして一般に, 1 次指標は既約指標である.

したがって, $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ が $G$ の既約指標のすべてである.

例えば $n = 5$ のとき, 指標表は以下のようになる.

| | $K_0$ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_1$ | 1 | $\zeta$ | $\zeta^2$ | $\zeta^3$ | $\zeta^4$ |
| $\chi_2$ | 1 | $\zeta^2$ | $\zeta^4$ | $\zeta$ | $\zeta^3$ |
| $\chi_3$ | 1 | $\zeta^3$ | $\zeta$ | $\zeta^4$ | $\zeta^2$ |
| $\chi_4$ | 1 | $\zeta^4$ | $\zeta^3$ | $\zeta^2$ | $\zeta$ |

# 6　群環と群の表現

## 6.1　多元環

**[定義 6.1]** 環 $A$ が可換環 $R$ の**多元環**あるとは, $A$ が $R$ 加群であって, 任意の $r \in R$, $x, y \in A$ に対して

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

が成り立つときにいう.

**[例 6.2]** 可換環 $R$ 自身は $R$ 上の多元環である.

**[例 6.3]** 可換環 $R$ の元を係数とする $n$ 次正方行列の全体 $M(n, R)$ は $R$ 上の多元環になる.

**[定義 6.4]** $A, B$ を可換環 $R$ 上の多元環する. 環としての準同型写像 $f : A \to B$ が, 任意の $r \in R$, $x \in A$ に対して

$$f(rx) = rf(x)$$

を満たすとき, $f$ は $R$ 上の**多元環としての準同型写像**であるという. さらに逆写像が存在するとき, $f$ は $R$ 上の多元環として同型写像であるという.

## 6.2　群環

$R$ を可換環, $G$ を有限群とし, $R[G]$ を形式和

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma, \quad a_\sigma \in R$$

の全体とする. $R[G]$ の 2 つの元 $\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$ と $\sum_{\sigma \in G} b_\sigma \sigma$ $(a_\sigma, b_\sigma \in R)$ の和, 積, スカラー倍を

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma + \sum_{\sigma \in G} b_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} (a_\sigma + b_\sigma)\sigma,$$
$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma\right)\left(\sum_{\sigma \in G} b_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma \in G} c_\sigma \sigma, \quad c_\sigma = \sum_{\tau \in G} a_\tau b_{\tau^{-1}\sigma},$$

$r \in R$, $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma \in R[G]$ に対してスカラー倍を

$$r \cdot \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma = \sum_{\sigma\in G}(ra_\sigma)\sigma$$

のようにして定義すると, $R[G]$ は $R$ 上の多元環になる.

**[定義 6.5]** $R[G]$ を $G$ の $R$ 上の**群環**という.

**[注意 6.6]** 「形式和」を用いずに群環を定義することもできる.

有限群 $G$ から可換環 $R$ への写像の全体を $\mathrm{Map}(G,R)$ とおく. $f$, $g \in \mathrm{Map}(G,R)$ に対して, 和, 積を

$$(f+g)(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma) \quad (\sigma \in G),$$
$$(f * g)(\sigma) = \sum_{\tau\in G} f(\tau)g(\tau^{-1}\sigma) \quad (\sigma \in G)$$

$r \in R$, $f \in \mathrm{Map}(G,R)$ に対してスカラー倍を

$$(rf)(\sigma) = r \cdot f(\sigma) \quad (\sigma \in G)$$

によって定義すると, $\mathrm{Map}(G,R)$ は $R$ 上の多元環になる.

$\mathrm{Map}(G,R)$ と $R[G]$ との間には, $R$ 上の多元環としての同型写像

$$\mathrm{Map}(G,R) \to R[G], \quad f \mapsto \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\sigma$$

が存在する. この対応によって, $\mathrm{Map}(G,R)$ と $R[G]$ を同一視することができる.

## 6.3 群環上の加群

$K[G]$ を有限群 $G$ の体 $K$ 上の群環とする. $K[G]$ を環と見るとき, $K[G]$ の $V$ への作用を, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma\right) \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\big((\rho(\sigma))(\boldsymbol{x})\big)$$

によって定義することにより, $V$ は左 $K[G]$ 加群となる.

逆に, $V$ が左 $K[G]$ 加群のとき, $V$ を $K$ 上の線型空間とみなすと, $\boldsymbol{x} \in V$, $\sigma \in G$ に対して, $V$ から $V$ への $K$ 上の線型同型写像

$$\rho(\sigma) : V \to V, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \sigma\boldsymbol{x}$$

が定まる. さらに

$$\rho : G \to GL(V), \quad \sigma \mapsto \rho(\sigma)$$

は群の準同型写像である. すなわち, $\rho$ は $G$ の $K$ 上の表現であり, $V$ が $\rho$ の表現空間になる.

**［定理 6.7］** $V_1, V_2$ を左 $K[G]$ 加群, $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ をそれぞれ $V_1, V_2$ から上記のようにして得られる $G$ の $K$ 上の表現とする．このとき, $V_1, V_2$ が左 $K[G]$ 加群として同型であるための必要十分条件は, $\rho_1, \rho_2$ が同値になることである.

### 6.4 群環の表現

$K[G]$ を有限群 $G$ の体 $K$ 上の群環とする．$V$ を $K$ 上の線型空間とし, $\mathrm{End}(V)$ を $V$ から $V$ 自身への線型写像の全体からなる $K$ 上の多元環とする.

**［定義 6.8］** $K[G]$ から $\mathrm{End}(V)$ への $K$ 上の多元環としての準同型写像を, 群環 $K[G]$ の $K$ 上の**表現**という.

$\rho : K[G] \to \mathrm{End}(V)$ を $K[G]$ の $K$ 上の表現とするとき, $\rho$ の定義域を $G$ に制限することにより, $G$ の $K$ 上の表現

$$\rho : G \to GL(V), \quad \sigma \mapsto \rho(\sigma)$$

が定まる.

逆に, $G$ の $K$ 上の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられたとき, $x = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \in K[G]$ に対して

$$\rho(x) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \rho(\sigma)$$

によって $V$ から $V$ 自身への線型写像 $\rho(x)$ が定まり,

$$\rho : K[G] \to \mathrm{End}(V), \quad x \mapsto \rho(x)$$

は $K$ 上の多元環としての準同型写像になる．すなわち, $\rho$ は $K[G]$ の $K$ 上の表現である.

以上のようにして, 群 $G$ の体 $K$ 上の表現と群環 $K[G]$ の $K$ 上の表現とが対応する.

# 付録 A 予備知識

## A.1 線型代数

### A.1.1 一般線型群

$K$ を体とする．0 以外の $K$ の元の全体は $K$ の乗法について群になる．この群を $K^\times$ で表す．つまり, $K^\times = K \setminus \{0\}$ である.

正の整数 $n$ に対して, $K$ の元を成分とする $n$ 次の正則行列の全体からなる群を $GL(n, K)$ で表す.

$K$ 上の線型空間 $V$ に対して, $V$ から $V$ 自身への $K$ 上の線型同型写像の全体を $GL(V)$ で表す. $GL(V)$ は写像の合成を積として群をなす.

$K$ 上の線型空間 $V$ が $n$ 次元であるとすると, $V$ の基底を 1 つ固定したとき, 線型同型写像とその表現行列とを対応させることにより, $GL(V)$ と $GL(n, K)$ との間に群の同型写像が定まる．特に, $n = 1$ のとき $GL(V) \cong GL(1, K) = K^\times$ である.

**[定義 A.1]** $GL(V)$ や $GL(n,K)$ を**一般線型群**と呼ぶ.

### A.1.2 トレース

$n$ を正の整数とする.

**[定義 A.2]** $n$ 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の対角成分の和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ を $A$ の**トレース**といい, $\operatorname{Tr} A$ で表す.

$A$, $B$ が $n$ 次正方行列のとき,

$$\operatorname{Tr}(A+B)=\operatorname{Tr} A+\operatorname{Tr} B,\quad \operatorname{Tr}(AB)=\operatorname{Tr}(BA)$$

が成り立つ. $B$ が正則ならば

$$\operatorname{Tr}(B^{-1}AB)=\operatorname{Tr}(BAB^{-1})=\operatorname{Tr} A$$

が成り立つ.

**[定義 A.3]** $V$ を体 $K$ 上の線型空間とし, $f$ を $V$ から $V$ 自身への線型写像とする. $V$ のある基底に関する $f$ の表現行列を $A$ とするとき, $\operatorname{Tr} A$ を $f$ の**トレース**といい, $\operatorname{Tr} f$ で表す.

**[注意 A.4]** 線型写像のトレースの定義は, $V$ の基底の選び方によらずに定まる.

$f$, $g$ が $V$ から $V$ 自身への線型写像のとき,

$$\operatorname{Tr}(f+g)=\operatorname{Tr} f+\operatorname{Tr} g,\quad \operatorname{Tr}(f\circ g)=\operatorname{Tr}(g\circ f)$$

が成り立つ. $g$ が同型写像ならば

$$\operatorname{Tr}(g^{-1}\circ f\circ g)=\operatorname{Tr}(g\circ f\circ g^{-1})=\operatorname{Tr} f$$

が成り立つ.

### A.1.3 双線型形式

ここでは, 体 $K$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとする. $V$, $W$ を $K$ 上の線型空間とする.

**[定義 A.5]** 写像 $B : V\times W\to K$ が**双線型形式**あるいは**双一次形式**であるとは, 次の条件を満たすときにいう.

- 任意の $x$, $x'\in V$, $y\in W$ に対して, $B(x+x',y)=B(x,y)+B(x',y)$.
- 任意の $x\in V$, $y$, $y'\in W$ に対して, $B(x,y+y')=B(x,y)+B(x,y')$.

- 任意の $a \in K$, $x \in V$, $y \in W$ に対して, $B(ax, y) = B(x, ay) = a \cdot B(x, y)$.

$V = W$ のとき, $B$ を $V$ 上の双線型形式という.

**[定義 A.6]** 双線型形式 $B : V \times W \to K$ が $W$ で**非退化**であるとは, $y \in W$ について, 「任意の $x \in V$ に対して $B(x, y) = 0$」ならば $y = 0$ であるときにいう. 同様に, 双線型形式 $B : V \times W \to K$ が $V$ で非退化であるとは, $x \in V$ について, 「任意の $y \in W$ に対して $B(x, y) = 0$」ならば $x = 0$ であるときにいう. $W$ でも $V$ でも非退化であるとき, $B$ は非退化であるという.

**[定義 A.7]** 双線型形式 $B : V \times V \to K$ が $V$ 上の**対称双線型形式**であるとは, 任意の $x$, $y \in V$ に対して $B(x, y) = B(y, x)$ が成り立つときにいう.

**[注意 A.8]** 対称双線型形式 $B : V \times W \to K$ においては, 1 番目の $V$ で非退化なことと 2 番目の $V$ で非退化なこととは同値である. すなわち, どちらかの $V$ で非退化ならば $B$ は非退化である.

### A.1.4 エルミート双線型形式

ここでは, 体 $K$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとする. $V$ を $K$ 上の線型空間とする.

**[定義 A.9]** 写像 $B : V \times V \to K$ が $V$ 上の**エルミート双線型形式**あるいは**エルミート双一次形式**であるとは, 次の条件を満たすときにいう.

- 任意の $x$, $x'$, $y \in V$ に対して, $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$.
- 任意の $x$, $y$, $y' \in V$ に対して, $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$.
- 任意の $a \in K$, $x$, $y \in V$ に対して, $B(ax, y) = B(x, \overline{a}y) = a \cdot B(x, y)$.
- 任意の $x$, $y \in V$ に対して $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$.

**[注意 A.10]** $K = \mathbb{R}$ のとき, エルミート双線型形式は対称双線型形式である.

**[注意 A.11]** エルミート双線型形式 $B : V \times V \to K$ において, 2 つの条件

- $y \in W$ について, 「任意の $x \in V$ に対して $B(x, y) = 0$」ならば $x = 0$.
- $x \in V$ について, 「任意の $y \in V$ に対して $B(x, y) = 0$」ならば $y = 0$.

は同値である. 上のいずれかの条件を満たすとき, $B$ は**非退化**であるという.

**[注意 A.12]** $V$ 上のエルミート双線型形式 $B : V \times V \to K$ について, 任意の $x \in V$ に対して $B(x,x)$ は実数である.

**[定義 A.13]** $V$ 上のエルミート双線型形式 $B : V \times V \to K$ について,

- 任意の $x \in V$, $x \neq 0$ に対して $B(x,x) > 0$ が成り立つとき, $B$ は**正定値**であるという.
- 任意の $x \in V$ に対して $B(x,x) \geq 0$ が成り立つとき, $B$ は**半正値**であるという.

**[注意 A.14]** 正定値エルミート双線型形式は非退化である.

**[定義 A.15]** $K$ 上の線型空間 $V$ 上の正定値エルミート双線型形式 $B$ を $V$ の**内積**という. また, $x, y \in V$ に対して, $B$ による像 $B(x,y)$ を $x$ と $y$ の内積という. 内積が定義された実または線型空間を**内積空間**という.

**[注意 A.16]** $K = \mathbb{R}$ のとき, 内積であることと正定値対称双線型形式であることとは同値である.

## A.2 群

### A.2.1 共役類

**[定義 A.17]** 群 $G$ の 2 つの元 $a, b$ が**共役**であるとは, ある $x \in G$ が存在して

$$b = xax^{-1}$$

が成り立つときにいう. 共役という関係は $G$ 上の同値関係である. この同値類を $G$ の**共役類**という.

$G$ の元 $a$ に対し, $a$ が属する共役類を $K(a)$ と書くことにする. すなわち,

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\}.$$

**[例 A.18]** $G$ の単位元 $1$ が属する共役類 $K(1)$ は $\{1\}$ である.

**[例 A.19]** $G$ がアーベル群の場合, $G$ の 2 つの元 $a, b$ が共役であることは $a = b$ と同値である. また, 任意の $a \in G$ に対して $K(a) = \{a\}$.

**［定理 A.20］** $G$ を群とする．$G$ の元 $a$ に対して

$$|K(a)| = (G : Z(a))$$

が成り立つ．ここで，$Z(a)$ は $a$ の $G$ における**中心化群**を表す[16)]．すなわち

$$Z(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}.$$

### A.2.2 群の作用

**［定義 A.21］** 群 $G$ と集合 $\Omega$ に対して，写像

$$T : G \times \Omega \to (a, x) \mapsto T(a, x)$$

が $\Omega$ 上の $G$ の**作用**であるとは，

- 任意の $a, b \in G$, $x \in \Omega$ に対して，$T(ab, x) = T(a, T(b, x))$.
- $G$ の単位元 $1$ に対して，$T(1, x) = x$.

が成り立つときにいう．また，このような写像が存在するとき，$G$ は $\Omega$ に作用するという．

**［例 A.22］** $G$ を群とするとき，

$$G \times G \to G, \quad (a, x) \mapsto ax$$

は $G$ の $G$ 自身への作用である．

**［例 A.23］** $G$ を群とするとき，

$$G \times G \to G, \quad (a, x) \mapsto xa^{-1}$$

は $G$ の $G$ 自身への作用である．

**［例 A.24］** $G$ を群，$N$ を $G$ の正規部分群とするとき，

$$G \times N \to N, \quad (a, x) \mapsto axa^{-1}$$

は $G$ の $N$ への作用である．

[16)] 中心化群を記号 $C_G(a)$ で表す本もある．

**［例 A.25］** $G$ を群, $H$ を $G$ の部分群, $G/H$ を $G$ の $H$ に関する左剰余類全体からなる集合[17]とする．このとき,

$$G \times G/H \to G/H, \quad (a, xH) \mapsto axH$$

は $G$ の $G/H$ への作用である.

**［例 A.26］** $G$ を群, $H$ を $G$ の部分群, $H \backslash G$ を $G$ の $H$ に関する右剰余類全体からなる集合とする．このとき,

$$G \times H \backslash G \to H \backslash G, \quad (a, Hx) \mapsto Hxa^{-1}$$

は $G$ の $H \backslash G$ への作用である.

### A.2.3 置換群

**［定義 A.27］** $\Omega$ を集合とするとき, $\Omega$ から $\Omega$ 自身への全単射を $\Omega$ 上の**置換**という.

集合 $\Omega$ の上の置換の全体は, 写像の合成を積として群になる.

$n$ を正の整数とし, $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする.

**［定義 A.28］** $\Omega_n$ 上の置換の全体からなる群 $S(\Omega_n)$ を $n$ 次**対称群**といい, $S_n$ で表す．また, $n$ 次対称群の部分群を $n$ 次**置換群**という.

**［注意 A.29］** $\Omega$ が $n$ 個の元からなる有限集合であるとき, $S(\Omega)$ は群として $S_n$ と同型である．したがって, 両者を同一視することができる.

$S_n$ の元 $\sigma$ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

のように表される．あるいは, $\sigma(i) = i$ であるような $\Omega$ の元を省略して

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

のように表されることもある．ただし, $i_l \neq j_l$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$, $r \leq n$.

$i_1, i_2, \ldots i_r$ を $\Omega_n$ の相異なる元とするとき,

- $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1$.

[17] $H$ が正規部分群でない場合, $G/H$ は群にならない.

- $i \in \Omega_n \setminus \{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ のとき, $\sigma(i) = i$.

を満たす $\sigma \in S_n$ を**巡回置換**といい, $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$ で表す. つまり, 巡回置換は

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 \end{pmatrix}$$

のように表される置換である. 特に, $r = 2$ のときの巡回置換を**互換**という.

**[定理 A.30]** 任意の置換は互換の積として表される.

**[注意 A.31]** 置換を互換の積として表す仕方は一意的ではない. また, 現れる互換の個数は一定ではない.

**[定理 A.32]** 置換を互換の積で表したとき, 現れる互換の個数が偶数であるか奇数であるかが互換に対して決まる.

**[定義 A.33]** 互換の積として表したときの互換の個数が偶数であるものを**偶置換**といい, 奇数であるものを**奇置換**という.

$S_n$ に含まれる偶置換の全体 $A_n$ は, $S_n$ の部分群になる.

**[定義 A.34]** $A_n$ を $n$ 次**交代群**という.

### A.2.4 可移群

$n$ を正の整数とし, $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする.

**[定義 A.35]** $n$ 次置換群 $G$ が**可移群**であるとは, 任意の $i, j \in \Omega_n$ に対して, ある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(i) = j$ が成り立つときにいう.

もっと一般に, $G$ が $t$ 重可移群であるとは, $l_1 \neq l_2$ のとき $i_{l_1} \neq i_{l_2}$, $j_{l_1} \neq j_{l_2}$ であるような任意の $(i_1, i_2, \ldots, i_t), (j_1, j_2, \ldots, j_t) \in \Omega_n^t$ に対して, ある $\sigma \in G$ が存在して

$$\sigma(i_1) = j_1, \quad \sigma(i_2) = j_2, \quad \ldots, \quad \sigma(i_t) = j_t$$

が成り立つときにいう. $t = 1$ のときが可移群である. $t \geq 2$ のとき, $G$ は**多重可移群**であるという.

**[例 A.36]** $n$ 次対称群 $S_n$ は $n$ 重可移群である.

**[例 A.37]** $n \geq 3$ のとき, $n$ 次交代群 $A_n$ は $n-2$ 重可移群である.

# 付録 B　問題の解答例

**［問題 1］** 表現が同値であるという関係が実際に群 $G$ の体 $K$ 上の表現全体の上での同値関係であることを確かめよ.

**［問題 1 の解答例］** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$, $\rho_3 : G \to GL(V_3)$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする.

任意の $g \in G$ に対して $\mathrm{id}_{V_1} \circ \rho_1(g) = \rho_1(g) \circ \mathrm{id}_{V_1}$ であるから, $\rho_1 \sim \rho_1$ である.

$\rho_1 \sim \rho_2$ のとき, ある線型同型写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$$

が成り立つ. このとき, $f^{-1} : V_2 \to V_1$ は線型同型写像であり,

$$f^{-1} \circ \rho_2(g) = \rho_1(g) \circ f^{-1}.$$

よって $\rho_2 \sim \rho_1$.

$\rho_1 \sim \rho_2$ かつ $\rho_2 \sim \rho_3$ のとき, ある線型同型写像 $f : V_1 \to V_2$, $f' : V_2 \to V_3$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f, \quad f' \circ \rho_2(g) = \rho_3(g) \circ f'$$

が成り立つ. このとき,

$$f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1} = \rho_2(g), \quad f' \circ \rho_2(g) \circ f'^{-1} = \rho_3(g)$$

であるから

$$f' \circ f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1} \circ f'^{-1} = \rho_3(g).$$

このとき, $f' \circ f : V_1 \to V_3$ は線型同型写像であり,

$$f' \circ f \circ \rho_1(g) = \rho_3(g) \circ f' \circ f.$$

であるから, $\rho_1 \sim \rho_3$. □

**［問題 2］** 任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W \subseteq W$ ならば任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W = W$ であることを証明せよ.

**［問題 2 の解答例］** $g \in G$ を任意にとる. 仮定より $\rho(g^{-1})W \subseteq W$ が成り立つ. このとき

$$W = \rho(gg^{-1})W = (\rho(g) \circ \rho(g^{-1}))W = \rho(g)(\rho(g^{-1})W) \subseteq \rho(g)W.$$

ゆえに任意の $g \in G$ に対して $W \subseteq \rho(g)W$ が成り立つ. したがって任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)W = W$ が成り立つ. □

**[問題 3]** 1 次表現は常に既約であることを示せ.

**[問題 3 の解答例]** $\rho : G \to GL(V)$ を 1 次表現とすると, 表現空間 $V$ は 1 次元の線型空間であるから, $V$ と $\{0\}$ 以外に部分空間をもたない. 特に, $V$ と $\{0\}$ 以外に $V$ の $\rho$-不変部分空間は存在しない. $\square$

**[問題 4]** 既約表現に同値な表現は既約であることを示せ.

**[問題 4 の解答例]** $\rho : G \to GL(V)$, $\rho' : G \to GL(V')$ を群 $G$ の体 $K$ 上の表現とする. $\rho'$ が既約かつ $\rho \sim \rho'$ ならば, $\rho$ が既約であることを示せばよい.

$\rho \sim \rho'$ とすると, ある線型同型写像 $f : V \to V'$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$$

が成り立つ. $W$ を $V$ の $\rho$-不変部分空間とすると, 任意の $g \in G$ に対して

$$\rho(g)W = W$$

が成り立つ. $W' = f(W)$ とおくと, $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ より

$$\rho'(g)W' = (\rho'(g) \circ f)(W) = f(\rho(g)W) = f(W) = W'.$$

もし仮に $W \neq V$ かつ $W \neq \{0\}$ と仮定すると, $\rho'$ が既約であることに矛盾する. したがって $\rho$ は既約でなければならない. $\square$

**[問題 5]** 任意の $x, y \in G$ に対して $R(xy) = R(x)R(y)$ が成り立つことを証明せよ.

**[問題 5 の解答例]** $x, y \in G$ とする. 群の表現 $\rho : G \to GL(V)$ は群の準同型写像であり, $GL(V)$ の積は写像の合成だから,

$$\rho(xy) = \rho(x) \circ \rho(y).$$

一般に, 2 つの線型写像の合成の表現行列は, それぞれの線型写像の表現行列の積である. したがって

$$R(xy) = R(x)R(y)$$

が成り立つ. $\square$

**[問題 6]** 任意の $x \in G$ に対して $R(x)$ は正則行列になることを証明せよ.

**[問題 6 の解答例]** $\rho(1) = \mathrm{id}_V$ より $r_{ij}(x) = \delta_{ij}$. ただし $\delta_{ij}$ は Kronecker のデルタである. よって $R(1)$ は単位行列である. また,

$$R(1) = R(xx^{-1}) = R(x)R(x^{-1})$$

より, $R(x)^{-1} = R(x^{-1})$. したがって $R(x)$ は逆行列をもつ. □

**[問題 7]** $\chi$ を有限群 $G$ の表現の指標とすると, 任意の $g \in G$ に対して $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ が成り立つことを示せ.

**[問題 7 の解答例]** $\rho : G \to GL(V)$ を $G$ の表現, $R : G \to GL(n, \mathbb{C})$ を $\rho$ の行列表示とする. $x \in G$ とし, その位数を $r$ とすれば,

$$\rho(x)^r = \rho(x^r) = \rho(1) = \mathrm{id}_V.$$

よって, $R(x)^r = E_n$ ($E_n$ は $n$ 次単位行列).

任意の複素行列 $A$ に対して, ある正の整数 $r$ が存在して $A^r = E_n$ となるならば, $A$ の Jordan 標準形は対角行列であり, その対角成分はすべて 1 の $r$ 乗根である[18].

したがって, ある正則行列 $P$ が存在して

$$P^{-1}R(x)P = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{pmatrix}, \quad \omega_i \in \mathbb{C}.$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ は 1 の $r$ 乗根であり, $\omega_i^{-1} = \overline{\omega_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である. $R(x^{-1}) = R(x)^{-1}$ より

$$P^{-1}R(x^{-1})P = (P^{-1}R(x)P)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & & \\ & \omega_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \chi(x^{-1}) &= \mathrm{Tr}\, R(x^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}R(x^{-1})P) \\ &= \omega_1^{-1} + \omega_2^{-1} + \cdots + \omega_n^{-1} \\ &= \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \cdots \overline{\omega_n} \\ &= \overline{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n} \\ &= \overline{\mathrm{Tr}\, R(x)} \\ &= \overline{\chi(x)}. \end{aligned}$$

□

[18] 例えば, 松坂和夫「線型代数入門」第 8 章 §10 問題 4 を参照.

**［問題 8］** 有限群 $G$ の 1 次指標 $\chi$ は $G$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像であることを示せ.

**［問題 8 の解答例］** $\chi$ が 1 次指標であることは, ある 1 次表現 $\rho : G \to GL(V)$ が存在して $\chi$ が $\rho$ の指標であることを意味する. $\rho$ の行列表示を $R : G \to \mathbb{C}^\times$ とする. 1 次の場合は任意の $g \in G$ に対して $\operatorname{Tr} R(g) = R(g)$ であることに注意する. このとき, 任意の $g \in G$ に対して,

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} \rho(g) = \operatorname{Tr} R(g) = R(g) \neq 0.$$

さらに, 任意の $g, h \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}\chi(gh) &= \operatorname{Tr} \rho(gh) = \operatorname{Tr} R(gh)\\ &= R(gh) = R(g)R(h)\\ &= \operatorname{Tr} R(g) \operatorname{Tr} R(h) = \operatorname{Tr} \rho(g) \operatorname{Tr} \rho(h)\\ &= \chi(g)\chi(h).\end{aligned}$$

したがって $\chi$ は $G$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像である. □

**［問題 9］** 有限群 $G$ の同値な 2 つの表現の指標は一致することを示せ.

**［問題 9 の解答例］** $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を有限群 $G$ の同値な 2 つの表現とすると, ある線型同型写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して

$$\rho_2 = f^{-1} \circ \rho_1(g) \circ f$$

が成り立つ. このとき,

$$\operatorname{Tr} \rho_2(g) = \operatorname{Tr}(f^{-1} \circ \rho_1(g) \circ f) = \operatorname{Tr} \rho_1(g).$$

したがって, $\rho_1$, $\rho_2$ の指標は一致する. □

**［問題 10］** 有限群 $G$ の 2 つの表現 $\rho, \rho'$ の指標をそれぞれ $\chi, \chi'$ とする. 既約分解を用いて, $\chi = \chi'$ ならば $\rho \sim \rho'$ を示せ.

**［問題 10 の解答例］** $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$ を $G$ の互いに同値でない既約表現の全体とし, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ をそれらの指標とする. $\rho, \rho'$ の既約分解を

$$\begin{aligned}\rho &\sim m_1\rho_1 \oplus m_2\rho_2 \oplus \cdots \oplus m_h\rho_h,\\ \rho' &\sim m'_1\rho_1 \oplus m'_2\rho_2 \oplus \cdots \oplus m'_h\rho_h\end{aligned}$$

とする. $\chi = \chi'$ だから,

$$m_i = (\chi \mid \chi_i) = (\chi' \mid \chi_i) = m'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

したがって $\rho, \rho'$ の既約分解は一致し, $\rho \sim \rho'$ が得られる. □

**［問題 11］** 指標は類関数であることを確かめよ.

**［問題 11 の解答例］** $\rho : G \to GL(V)$ を有限群 $G$ の表現とし, $\chi$ を $\rho$ の指標とする. このとき, 任意の $g, h \in G$ に対して,

$$\chi(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(g) \circ \rho(h) \circ \rho(g)^{-1}) = \chi(h).$$

□

**［問題 12］** $\mathrm{Cl}(G)$ の複素線型空間としての次元は有限群 $G$ の共役類の個数に一致することを示せ.

**［問題 12 の解答例］** 有限群 $G$ の共役類の個数を $l$ とし, $K_1, K_2, \ldots, K_l$ を $G$ の共役類の全体とする.

$\varphi \in \mathrm{Cl}(G)$ とする. $i = 1, 2, \ldots, l$ に対して, $K_i$ からその元 $c_i$ を 1 つずつとり, $a_i = \varphi(c_i)$ とおく. また, $g \in G$ に対して

$$\varphi_i(g) = \begin{cases} 1, & g \in K_i \\ 0, & g \notin K_i \end{cases}$$

とおくことによって $\varphi_i \in \mathrm{Cl}(G)$ が得られる.

任意の $g \in G$ に対して, ある番号 $j$ がただ 1 つ存在して, $g \in K_j$ かつ $g$ と $c_j$ とは共役であるから,

$$\varphi(g) = \varphi(c_j) = a_j = a_j\varphi_j(g) = \sum_{i=1}^{l} a_i\varphi_i(g).$$

ゆえに, $\varphi$ は $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ の $\mathbb{C}$ 上の 1 次結合で表される. また, 上の等式より $\sum_{i=1}^{l} a_i\varphi_i$ が零写像ならば $a_1 = a_2 = \cdots = a_l = 0$ となることもわかる. したがって, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ は $\mathrm{Cl}(G)$ の基底である. このことから, $\mathrm{Cl}(G)$ の複素線型空間としての次元は $G$ の共役類の個数 $l$ に等しいことがわかる. □

# 参考文献


[1] 秋月康夫・鈴木通夫, 高等代数学 II, 岩波書店, 1957

[2] 桂利行, 代数学 II, 東京大学出版会, 2007

[3] 近藤武, 群論 III, 岩波書店, 1977

[4] 佐武一郎, 線形代数学, 裳華房, 1974

[5] 鈴木通夫, 群論（下）, 岩波書店, 1978

[6] 寺田至・原田耕一郎, 群論, 岩波書店, 1997

[7] 永尾汎, 群論の基礎, 朝倉書店, 1967

[8] 永尾汎・津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987

[9] 服部昭, 群とその表現, 共立出版, 1967

[10] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店, 1976

[11] 松坂和夫, 線型代数入門, 岩波書店, 1980

[12] 横沼健雄, テンソル空間と外積代数, 岩波書店, 1977

# 索 引