群の同型定理

MATHEMATICS.PDF

2009-09-28

目 次

1　商集合を定義域とする写像

集合 X から集合 Y への**写像**とは, X の各元 x に対して, Y の元 y をただ 1 つだけ対応させる規則のことである.

集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとし, 写像 $\pi : X \to X/\sim$ を

$$\pi(x) = [x] \quad ([x] \text{ は } x \text{ を代表元とする同値類})$$

と定義する. π は全射である. この写像 π を**射影**という.

集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ が与えられ, かつ X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. いま, この写像 f が**代表元の取り方によらない**という条件

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x') \tag{1}$$

を満たしていると仮定する[1]. このとき

$$\overline{f}([x]) = f(x)$$

と定義すると写像 $\overline{f} : X/\sim \to Y$ が定まる. この写像 $\overline{f}$ を f より**誘導された写像**あるいは**引き起こされた写像**という.

条件 (1) が成り立つとき, 写像 $\overline{f}$ は **well-defined** であるという[2].

[命題 1.1] $\pi : X \to X/\sim$ を射影とするとき

$$f = \overline{f} \circ \pi$$

が成り立つ.

[証明] X の任意の元 x に対して

$$\overline{f} \circ \pi(x) = \overline{f}([x]) = f(x)$$

が成り立つ. □

[1]つまり, 条件 (1) が成り立つことを「代表元の取り方によらない」という. 実際, 条件 (1) は, 商集合 $X/\sim$ に含まれる各同値類に対して, その代表元 x の選び方に影響されずに, 値 $f(x)$ がただ 1 つ対応すること意味している.

[2]商集合を定義域とする写像を考える際には, その写像が well-defined であることを必ず確認しなければならない. この文書では, 定理の主張でいきなり「写像 $\overline{f}$」というとき, well-defined であることを暗黙のうちに仮定している.

[命題 1.2] $f : X \to Y$ が全射ならば, 写像 $\overline{f} : X/\sim \to Y$ も全射である.

[証明] y を Y の元とする. f は全射だから, X の元 x で $f(x) = y$ となるものがある. このとき

$$\overline{f}([x]) = f(x) = y.$$

よって $\overline{f}$ は全射である. □

[命題 1.3] $f : X \to Y$ が条件

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim x'$$

を満たすとする. このとき, 写像 $\overline{f} : X/\sim \to Y$ は単射である.

[証明] $\overline{f}([x]) = \overline{f}([x']) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim x' \Rightarrow [x] = [x']$. □

[例 1.4] X, Y を集合とし, 全射 $f : X \to Y$ が与えられているとする. このとき X における関係 $\sim$ を

$$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

と定義すると $\sim$ は同値関係になる. このとき f から誘導された写像

$$\overline{f} : X/\sim \to Y, \quad [x] \mapsto f(x)$$

は well-defined かつ全単射である[3]. とくに, $X/\sim$ の濃度と Y の濃度は等しい.

[3] well-defined の定義, 命題 1.2, 命題 1.3 より.

2　正規部分群

G を群とする. G の部分群 N が, 条件

$$xN = Nx \quad (\forall x \in G)$$

を満たすとき, N は G の**正規部分群**である, あるいは G の部分群 N は**正規**であるという.

[例 2.1] Abel 群の部分群はすべて正規である.

[命題 2.2] 群 G の部分群 N が正規部分群であるためには

$$xNx^{-1} \subseteq N \quad (\forall x \in G)$$

であることが必要十分である.

[証明] N が正規部分群であるとする. N の元 a と G の元 x に対して

$$xax^{-1} = axx^{-1} = a \in N$$

ゆえに $xNx^{-1} \subseteq N$ である.

逆に, N が命題の条件を満たしているとする. a を N の元とし, x を G の元とする. N の元 b を適当にとると

$$xax^{-1} = b \qquad \therefore xa = bx \in Nx.$$

これは $xN \subseteq Nx$ であることを示している. また, x^{-1} もまた G の元であるから, N の元 b' を適当にとると

$$x^{-1}ax = x^{-1}a(x^{-1})^{-1} = b' \qquad \therefore ax = xb' \in xN.$$

よって $Nx \subseteq xN$ である. したがって $xN = Nx$. □

[命題 2.3] G を群とし，H, N を G の部分群とする．N が G の正規部分群ならば，HN は G の部分群である．さらに，H も G の正規部分群ならば，HN は G の正規部分群である.

[証明] h_1, h_2 を H の元，n_1, n_2 を N の元とする．N は正規部分群だから，

$$h_2^{-1}n_1h_2 \in N, \qquad h_1n_1^{-1}h_1^{-1} \in N.$$

よって，

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = (h_1h_2)(h_2^{-1}n_1h_2)n_2 \in HN,$$
$$(h_1n_1)^{-1} = n_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1n_1^{-1}h_1) \in HN.$$

ゆえに，HN は G の部分群である．

さらに，H も正規部分群とするとき，$g \in G, h \in H, n \in N$ ならば，

$$g(hn)g^{-1} = (ghg^{-1})(gng^{-1}) \in HN.$$

よって HN は G の正規部分群になる． □

[命題 2.4] 群 G の部分群 H, K について次の 2 つの条件は同値である．

(i) HK は G の部分群である．

(ii) $HK = KH$.

[証明] (i)⇒(ii)　積 HK が G の部分群であれば，

$$H, K \subseteq HK \Rightarrow KH \subseteq HK$$

である．一方，

$$x \in HK \Rightarrow x^{-1} \in HK \Rightarrow x \in (HK)^{-1} = KH$$

であるから，$HK \subseteq KH$．ゆえに $KH = HK$.

(ii)⇒(i)　$L = HK$ とおく．

$$LL = H(KH)K = HHKK \subseteq L$$

より，L の任意の 2 つの元の積は L に属する．また，

$$HK = KH \Rightarrow L^{-1} = L$$

より，L の任意の元 x の逆元は L に属する．以上より L は G の部分群である． □

3　準同型写像

G, G' を群とし, $f : G \to G'$ を写像とする．任意の x, $y \in G$ に対して

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

が成り立つとき, f を**準同型写像**という．あるいは簡単に**準同型**ということもある．

［例 3.1］ G を群, N を G の正規部分群とする．このとき, 写像

$$\pi : G \to G/N, \quad x \mapsto xN$$

は全射かつ準同型である．π は**標準的全射**あるいは**自然な全射**と呼ばれている[4)]．

［命題 3.2］ G, G' を群, e, e' をそれぞれ G, G' の単位元とし, $f : G \to G'$ を準同型写像とする．このとき

(i) $f(e) = e'$

(ii) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

が成り立つ．

［証明］ (i)　e が G の単位元であることと, f が準同型写像であることから

$$f(e)f(e) = f(ee) = f(e).$$

両辺に $f(e)^{-1}$ を掛ければ $f(e) = e'$ を得る．

(ii)　(i) の結果を用いれば

$$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e'.$$

同様に $f(x^{-1})f(x) = e'$ も得る．したがって逆元の一意性から $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ を得る．　□

4) **標準的準同型**, **自然な準同型**などと呼ばれることもある．

[命題 3.3] G, G' を群, e' を G' の単位元とし, $f: G \to G'$ を準同型写像とする. このとき

$$\ker f = f^{-1}(e) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$$

は G の正規部分群である. $\ker f$ を f の**核**という.

[証明] まず, $\ker f$ が G の部分群であることを示す. a, b を $\ker f$ の元とする.

$$f(a) = f(b) = e'$$

であるから

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(e)f(e)^{-1} = e'.$$

よって ab^{-1} は $\ker f$ に属する. これは $\ker f$ が G の部分群であることを示している.

次に, $\ker f$ が G の正規部分群であることを示す. G の元 x と $\ker f$ の元 a に対して

$$f(xax^{-1}) = f(x)f(a)f(x^{-1}) = f(x)e'f(x)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e'$$

であるから xax^{-1} は $\ker f$ に属する. これは $\ker f$ が G の正規部分群であることを示している. □

[例 3.4] G を群, N を G の正規部分群とする. 標準的全射

$$\pi : G \to G/N, \quad x \mapsto xN$$

の核は,

$$\ker \pi = \{x \in G \mid xN = N\} = N$$

である.

[例 3.5] $f : G \to G'$ を群の準同型写像とし, H を G の部分群, $f_H : H \to G'$ を f の H への制限とする. このとき, f_H は準同型写像であり,

$$\ker f_H = \{h \in H \mid f(h) = f_H(h) = e'\} = H \cap \ker f$$

が成り立つ.

[命題 3.6] G, G' を群, $f : G \to G'$ を全射準同型写像とし, $N = \ker f$ とする. このとき G の任意の部分群 H に対して

$$f^{-1}(f(H)) = HN$$

が成り立つ. ただし, $HN = \{hn \mid h \in H,\, n \in N\}$ とする.

[証明] G の元 a について

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(f(H)) &\Leftrightarrow f(a) \in f(H) \Leftrightarrow f(a) = f(h)\ (\exists h \in H) \\ &\Leftrightarrow ah^{-1} \in N\ (\exists h \in H) \Leftrightarrow a \in hN\ (\exists h \in H) \\ &\Leftrightarrow a \in HN \end{aligned}$$

が成り立つ. □

[命題 3.7] $f : G \to G'$ を群の全射準同型写像とする.

(i) H が G の部分群ならば, $f(H)$ は G' の部分群である. とくに H が正規ならば $f(H)$ も正規である.

(ii) H' が G' の部分群ならば, $f^{-1}(H')$ は G の部分群である. とくに H' が正規ならば $f^{-1}(H')$ も正規である.

[証明] (i)　H が G の部分群ならば

$$f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) \in f(H) \qquad (\forall x, \forall y \in G)$$

ゆえ, $f(H)$ は G' の部分群である. さらに, H が G の正規部分群ならば

$$f(x)f(H) = f(xH) = f(Hx) = f(H)f(x) \qquad (\forall x \in G)$$

であるから, $f(H)$ は G の正規部分群である.

(ii)　H' が G' の部分群ならば

$$\begin{aligned} x,\, y \in f^{-1}(H') &\Rightarrow f(x),\, f(y) \in H' \\ &\Rightarrow f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H' \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in f^{-1}(H') \end{aligned}$$

ゆえ, $f^{-1}(H')$ は G の部分群である. さらに H' が G' の正規部分群ならば

$$
\begin{aligned}
y \in xf^{-1}(H') &\Leftrightarrow x^{-1}y \in f^{-1}(H') \\
&\Leftrightarrow f(x^{-1}y) \in H' \Leftrightarrow f(x)^{-1}f(y) \in H' \\
&\Leftrightarrow f(y) \in f(x)H' \Leftrightarrow f(y) \in H'f(x) \\
&\Leftrightarrow f(y)f(x^{-1}) \in H' \Leftrightarrow f(yx^{-1}) \in H' \\
&\Leftrightarrow yx^{-1} \in f^{-1}(H') \\
&\Leftrightarrow y \in f^{-1}(H')x
\end{aligned}
$$

であるから, $xf^{-1}(H') = f^{-1}(H')x$. ゆえに $f^{-1}(H')$ は G の正規部分群である. □

【定理 3.8】 $f : G \to G'$ を群の全射準同型写像とし, $N = \ker f$ とする. N を含むような G の部分群全体の集合を Ω とし, G' の部分群全体の集合を Ω' とする. このとき, 写像

$$\Phi : \Omega \to \Omega', \qquad H \mapsto f(H)$$

は全単射で

$$\Psi : \Omega' \to \Omega, \qquad H' \mapsto f^{-1}(H')$$

が Φ の逆写像になっている. とくに, $H \in \Omega$ と $H' \in \Omega'$ とが対応しているとき

$$H \text{ が } G \text{ の正規部分群} \Leftrightarrow H' \text{ が } G' \text{ の正規部分群}$$

である.

【証明】 $H \in \Omega$ ならば $f(H) \in \Omega'$ であることは命題 3.7 からわかる. $H' \in \Omega'$ ならば $f^{-1}(H') \in \Omega$ であることは, 命題 3.7 と $f^{-1}(H') \supseteq f^{-1}(e') = N$ とからわかる. また, f は全射だから $f(f^{-1}(H')) = H'$ である. $f^{-1}(f(H)) \supseteq H$ も明らかである. $f^{-1}(f(H)) \subseteq H$ は

$$
\begin{aligned}
a \in f^{-1}(f(H)) &\Rightarrow f(a) \in f(H) \\
&\Rightarrow f(a) = f(h) \ (\exists h \in H) \\
&\Rightarrow ah^{-1} \in N \subseteq H \\
&\Rightarrow a \in H
\end{aligned}
$$

よりわかる. 以上より Φ と Ψ とは互いに逆写像であることが証明された. 後半は命題 3.7 より明らか. □

4　準同型定理と 3 つの同型定理

G, G' を群とする．写像 $f : G \to G'$ が**同型写像**であるとは，f が全単射かつ準同型であるときにいう．同型写像のことを単に**同型**ともいう．群 G から群 G' への同型写像が存在するとき，G と G' とは**同型**であるといい，$G \cong G'$ で表す．

［定理 4.1（準同型定理）］ G, G' を群，$f : G \to G'$ を全射準同型写像，f の核を N とする．写像 $\overline{f} : G/N \to G'$ を

$$\overline{f}(xN) = f(x)$$

によって定義する．このとき $\overline{f}$ は群の同型写像となる．したがって G/N と G' とは群として同型である．

［証明］ まず，$N = \ker f$ だから，命題 3.3 より N は正規部分群である．したがって剰余群 G/N が定義できる．

G の元 x_1, x_2 に対して

$$x_1 x_2^{-1} N \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

が成り立つ．実際，$N = \ker f$ だから，

$$x_1 x_2^{-1} \in N \Leftrightarrow f(x_1) f(x_2)^{-1} = f(x_1 x_2^{-1}) = e' \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

このことと，f が全射であるという仮定から，f は全単射

$$\overline{f} : G/N \to G', \quad xN \mapsto f(x)$$

を誘導する（例 1.4）．

この写像 $\overline{f}$ は準同型である．実際

$$\overline{f}((xN)(yN)) = \overline{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(xN)\overline{f}(yN)$$

である．よって $\overline{f}$ は群の同型写像である．　$\square$

［命題 4.2］ G_1, G_2, $\ldots$, G_n を群とし，N_i を G_i の正規部分群とする．このとき，$N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ は $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$ の正規部分群であり，

$$G/N \cong \prod_{i=1}^{n} (G_i/N_i), \quad (x_1, \ldots, x_n)N \mapsto (x_1 N, \ldots, x_n N)$$

が成り立つ．

[証明] $n=2$ の場合について証明する．$n>2$ についても同様に示すことができる．

$i=1,2$ に対して標準的全射

$$\pi_i : G_i \to G_i/N_i, \quad x_i \mapsto x_i N$$

を考えると, 写像

$$\begin{aligned} \pi : G_1 \times G_2 &\to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2), \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\pi_1(x_1), \pi_2(x_2)) = (x_1 N, x_2 N) \end{aligned}$$

が全射であることはすぐにわかる．さらに, $\ker \pi_i = N_i$ より

$$\ker \pi = \ker \pi_1 \times \ker \pi_2 = N_1 \times N_2$$

である．したがって準同型定理 4.1 により主張は示される． □

[注意 4.3] G_1, G_2 を群とし, N_1 を G_1 の正規部分群, N_2 を G_2 の正規部分群とする．このとき, $G_1 \cong G_2$ かつ $N_1 \cong N_2$ であっても, $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ とは限らない．

例えば,

$$G_1 = G_2 = N_1 = \mathbb{Z}, \quad N_2 = 2\mathbb{Z}$$

とおく．$\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z},\ x \mapsto 2x$ は加法群の同型写像である．したがって $N_1 \cong N_2$ であるが,

$$G_1/N_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0\}, \quad G_2/N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

なので, G_1/N_1 と G_2/N_2 との間に全単射は存在しない[5)]．したがって同型にならない．

例をもう 1 つ挙げよう．

$$\begin{aligned} G_1 &= G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ N_1 &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \{0\} = \langle (1+2\mathbb{Z},\ 0+4\mathbb{Z}) \rangle, \\ N_2 &= \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle (0+2\mathbb{Z},\ 2+4\mathbb{Z}) \rangle \end{aligned}$$

とおく．ただし, $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{x + 4\mathbb{Z} \mid x \in 2\mathbb{Z}\}$ である．$N_1 \cong N_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．一方, 任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x \equiv y \pmod 4 \Rightarrow x \equiv y \pmod 2$$

[5)] 一般に, 元の個数が異なる 2 つの有限集合の間に全単射は存在しない．

であるから, 写像

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad x + 4\mathbb{Z} \mapsto x + 2\mathbb{Z}$$

は well-defined である．ただし $x \in \mathbb{Z}$. 準同型かつ全射であることはすぐにわかる．この写像の核は $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である．準同型定理 4.1 により同型

$$\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

が得られる．したがって

$$G_1/N_1 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad G_2/N_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となり[6], G_1/N_1 と G_2/N_2 は同型ではない[7].

［定理 4.4（第 1 同型定理）］ $f : G \to G'$ を群の全射準同型写像とし, N' を G' の正規部分群, $N = f^{-1}(N')$ とする．このとき

$$G/N \to G'/N', \qquad xN \to f(x)N'$$

は同型写像である．

［証明］ 標準的な全射

$$\pi' : G' \to G'/N', \qquad x' \mapsto x'N'$$

を考える．2 つの全射準同型写像の合成

$$\pi' \circ f : G \to G'/N, \qquad x \mapsto f(x)N'$$

は全射準同型写像である．このとき $\ker(\pi' \circ f) = N$ である．実際

$$x \in \ker(\pi' \circ f) \Leftrightarrow f(x) \in N' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(N') \Leftrightarrow x \in N$$

である．準同型定理 4.1 により求める同型写像が得られる． □

---

[6] 命題 4.2 を適用.

[7] Abel 群の基本定理から明らかであるが, 直接証明することも可能である．$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は位数 4 の元をもつので, それと同型な群においてもそうでなければならない．ところが, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は位数 4 の元もたない.

［定理 4.5（第 2 同型定理）］ G を群, N を G の正規部分群, H を G の部分群とする．このとき

$$H/(H \cap N) \to HN/N, \qquad h(H \cap N) \mapsto hN$$

は同型写像である.

［証明］ $\pi : G \to G/N$ を標準的な全射とする．$\ker \pi = N$ である.

π の H への制限を π_H とすると, π_H は H から $\pi(H)$ への全射準同型であり, $\ker \pi_H = H \cap N$ である（例 3.5）．ゆえに $H \cap N$ は H の正規部分群（命題 3.3）であり, 準同型定理 4.1 により

$$H/(H \cap N) \to \pi(H), \quad h(H \cap N) \mapsto \pi(h) \tag{2}$$

もまた同型写像である.

次に, HN は N を含むような G の部分群である（命題 2.3）．そこで, π の HN への制限 π_{HN} を考える．$\pi_{HN} : HN \to \pi(HN)$ は全射準同型であり,

$$\ker \pi_{HN} = HN \cap N = N$$

である（例 3.5）．N は HN の正規部分群（命題 3.3）であり, 剰余群 HN/N が定義できる．さらに,

$$HN/N = \{hnN \mid h \in H, n \in N\} = \{hN \mid h \in H\}.$$

すなわち, 剰余類の代表元として必ず H の元をとることができる．一方, $\ker \pi = N$ だから, 任意の $h \in H$, $n \in N$ に対して

$$\pi(hn) = \pi(h)\pi(n) = \pi(h).$$

すなわち $\pi(HN) \subseteq \pi(N)$．逆の包含関係は明らかだから, $\pi(HN) = \pi(N)$ である．したがって, 準同型定理 4.1 により同型 $HN/N \cong \pi(HN) = \pi(H)$ が得られるので, その逆写像を考えれば,

$$\pi(H) \cong HN/N, \quad \pi(h) \mapsto hN \tag{3}$$

なる同型が得られる.

2 つの同型写像 (2), (3) を合成することにより求める同型写像が得られる． □

[命題 4.6] 群 G の正規部分群を N とし, $f : G \to G'$ を群の準同型写像とする. このとき, 準同型写像

$$\overline{f} : G/N \to G', \quad xN \mapsto f(x) \tag{4}$$

が存在するための必要十分条件は, $N \subseteq \ker f$ が成り立つことである.

[証明] $\pi : G \to G/N$, $x \mapsto xN$ を標準的な全射とする. 準同型写像 (4) が存在すると仮定すると, $f = \overline{f} \circ \pi$ なので,

$$f(N) = \overline{f}(\pi(N)) = \overline{f}(N) = e'.$$

ゆえに $N \subseteq \ker f$.

逆に, $N \subseteq \ker f$ と仮定すると,

$$x_1 x_2^{-1} \in N \Rightarrow f(x_1) f(x_2)^{-1} = f(x_1 x_2^{-1}) = e' \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

ゆえに, f は写像

$$\overline{f} : G/N \to G', \quad xN \mapsto f(x)$$

を誘導する. $\overline{f}$ が準同型であることはすぐに確かめられる. □

[注意 4.7] 群 G の正規部分群を N とし, $f : G \to G'$ を群の全射準同型写像とする. $N \subseteq \ker f$ が成り立つとき, f から誘導される準同型写像 (4) は全射である. 実際, $f = \overline{f} \circ \pi$ なので,

$$\overline{f}(G/N) = \overline{f}(\pi(G)) = f(G) = G'$$

となる.

[定理 4.8(第 3 同型定理)] G を群, M, N を正規部分群とし, $N \subseteq M$ とする. このとき

$$G/M \cong \frac{G/N}{M/N}$$

が成り立つ. ただし, M/N は G/N の同値類で M の元を代表元とするものの全体を表す. すなわち,

$$M/N = \{xN \in G/N \mid x \in M\}$$

とおく.

［証明］ 標準的な全射 $\pi' : G \to G/M$, $x \mapsto xM$ を考える.

$$N \subseteq M = \ker \pi'$$

であるから, π' は準同型写像

$$\overline{\pi'} : G/N \to G/M, \quad xN \mapsto \pi'(x) = xM$$

を誘導する（命題 4.6）.

$$\ker \overline{\pi'} = \{xN \in G/N \mid xM = M\} = M/N$$

だから, 準同型定理 4.1 より

$$\frac{G/N}{M/N} \cong \overline{\pi'}(G/N).$$

一方, 標準的な全射 $\pi : G \to G/N$, $x \mapsto xN$ を考えると, $\pi' = \overline{\pi'} \circ \pi$ が成り立つから,

$$\overline{\pi'}(G/N) = \overline{\pi'}(\pi(G)) = \pi'(G) = G/M.$$

したがって求める同型が得られる. $\square$

5　Zassenhaus の補題

［命題 5.1］ G を群，U_1, U_2, V_1, V_2 を G の部分群とし，U_2 は U_1 の正規部分群，V_2 は V_1 の正規部分群であるとする．このとき $U_2 \cap V_2$ は $U_1 \cap V_1$ の正規部分群である．

［証明］ $g \in U_1 \cap V_1,\, x \in U_2 \cap V_2$ とする．U_2 は U_1 の正規部分群，V_2 は V_1 の正規部分群であるから，

$$g \in U_1,\ x \in U_2 \Rightarrow gxg^{-1} \in U_2,$$
$$g \in V_1,\ x \in V_2 \Rightarrow gxg^{-1} \in V_2.$$

ゆえに，

$$gxg^{-1} \in U_2 \cap V_2 \Rightarrow g(U_2 \cap V_2)g^{-1} \subseteq U_2 \cap V_2.$$

したがって，$U_2 \cap V_2$ は $U_1 \cap V_1$ の正規部分群である．　□

［命題 5.2］ G を群，U_1, U_2, V_1, V_2 を G の部分群とし，U_2 は U_1 の正規部分群，V_2 は V_1 の正規部分群であるとする．このとき，

(i) $U_2(U_1 \cap V_2), U_2(U_1 \cap V_1)$ はともに U_1 の部分群である．

(ii) $U_2(U_1 \cap V_2)$ は $U_2(U_1 \cap V_1)$ の正規部分群である．

［証明］ (i)　U_2 は U_1 の正規部分群であり，$U_1 \cap V_1$ は U_1 の部分群であるから，積 $U_2(U_1 \cap V_1)$ は U_1 の部分群である（命題 2.3）．同様に，$U_2(U_1 \cap V_2)$ も U_1 の部分群である．

(ii)　$V_2 \subseteq V_1$ より $U_2(U_1 \cap V_2) \subseteq U_2(U_1 \cap V_1)$. よって $U_2(U_1 \cap V_2)$ は $U_2(U_1 \cap V_1)$ の部分群である．

また，U_2 は U_1 の正規部分群, V_2 は V_1 の正規部分群だから，$U_1 \cap V_2$ は $U_1 \cap V_1$ の正規部分群である（命題 5.1）．したがって，$u \in U_2,\, g \in U_1 \cap V_1$ に対して，

$$\begin{aligned} ug\,U_2(U_1 \cap V_2)(ug)^{-1} &= ug\,U_2 g^{-1} g(U_1 \cap V_2)g^{-1}u^{-1} \\ &\subseteq u\,U_2(U_1 \cap V_2)u^{-1} \\ &\subseteq U_2(U_1 \cap V_2)U_2. \end{aligned}$$

一方, $U_2(U_1 \cap V_1)$ は U_1 の部分群だから, 命題 2.4 より

$$(U_1 \cap V_1)U_2 = U_2(U_1 \cap V_1).$$

よって,

$$U_2(U_1 \cap V_2)U_2 = U_2U_2(U_1 \cap V_2) \subseteq U_2(U_1 \cap V_2).$$

ゆえに,

$$ug\, U_2(U_1 \cap V_2)(ug)^{-1} \subseteq U_2(U_1 \cap V_2).$$

したがって, $U_2(U_1 \cap V_2)$ は $U_2(U_1 \cap V_1)$ の正規部分群である. □

［命題 5.3（Dedekind の法則）］ G を群, L を G の部分群とする. また, V を G の部分集合, U を L の部分集合とする. このとき,

$$UV \cap L = U(V \cap L), \quad VU \cap L = (V \cap L)U$$

が成り立つ.

［証明］ $U(V \cap L)$ は UV の部分集合である．また，L は G の部分群だから,

$$U(V \cap L) \subseteq LL \subseteq L.$$

ゆえに $UV \cap L \supseteq U(V \cap L)$.

$x \in UV \cap L$ とする．$x \in L$ であり，かつ，ある $u \in U, v \in V$ が存在して $x = uv$ と書ける. 仮定より L が U を含む部分群であるから,

$$v = u^{-1}x \in L \Rightarrow v \in V \cap L \Rightarrow x = uv \in U(V \cap L).$$

したがって $UV \cap L \subseteq U(V \cap L)$．これより 1 番目の等式が得られる. まったく同じようにして 2 番目の等式も証明できる. □

［定理 5.4（Zassenhaus の補題）］ G を群，U_1, U_2, V_1, V_2 を G の部分群とし，U_2 は U_1 の正規部分群，V_2 は V_1 の正規部分群であるとする．このとき，同型

$$\frac{U_2(U_1 \cap V_1)}{U_2(U_1 \cap V_2)} \cong \frac{V_2(V_1 \cap U_1)}{V_2(V_1 \cap U_2)}$$

が成り立つ.

[証明] 命題 5.2 により，$U_2(U_1 \cap V_2)$ は $U_2(U_1 \cap V_1)$ の正規部分群である．

$H = U_2(U_1 \cap V_2)$, $K = U_1 \cap V_1$ とおくと，

$$\begin{aligned} U_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap V_1 &\Rightarrow (U_1 \cap V_2)(U_1 \cap V_1) = U_1 \cap V_1 \\ &\Rightarrow U_2(U_1 \cap V_2)(U_1 \cap V_1) = U_2(U_1 \cap V_1) \end{aligned}$$

であるから，

$$HK = U_2(U_1 \cap V_1).$$

また, Dedekind の法則 5.3 により[8),

$$\begin{aligned} H \cap K &= U_2(U_1 \cap V_2) \cap (U_1 \cap V_1) \\ &= (U_2 \cap (U_1 \cap V_1))(U_1 \cap V_2) \\ &= (U_2 \cap V_1)(U_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

したがって，第 2 同型定理 4.5 を適用すると，同型

$$HK/H \cong K/H \cap K,$$

すなわち，

$$\frac{U_2(U_1 \cap V_1)}{U_2(U_1 \cap V_2)} \cong \frac{U_1 \cap V_1}{(U_2 \cap V_1)(U_1 \cap V_2)}$$

が得られる．

$H = V_2(U_2 \cap V_1)$, $K = U_1 \cap V_1$ とおいて上と同様に議論すれば,

$$\frac{V_2(V_1 \cap U_1)}{V_2(V_1 \cap U_2)} \cong \frac{U_1 \cap V_1}{(U_1 \cap V_2)(U_2 \cap V_1)}$$

が得られる．さらに, 命題 2.4 より

$$(U_2 \cap V_1)(U_1 \cap V_2) = (U_1 \cap V_2)(U_2 \cap V_1)$$

である. したがって求める同型が得られる． □

---

8) $U = U_1 \cap V_2$, $V = U_2$, $L = U_1 \cap V_1$ とおいて適用.