形式的冪級数

MATHEMATICS.PDF

2011-01-26

目 次

最初に, 記号についての注意事項を述べておく.

$\mathbb{N}$ を自然数全体からなる集合とする. 自然数には 0 を含むものとする.

可換環というときには, 単位元をもつ可換環を意味する.

集合 X に対して, X^n を n 個の X からなる直積とする. また, 集合 X, Y に対して, $\mathrm{Map}(X, Y)$ を集合 X から Y への写像全体からなる集合とする.

一般に, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 等の太字のアルファベットは直積集合の元を表す. 特に断りのないとき, $\boldsymbol{i}$ の各成分を $i_1, i_2, \ldots$ で表すものとする. また, $\mathbf{0}$ はすべての成分が 0 であるような元を表す.

1 級数の和

R を可換環, n を正の整数とする.

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, g と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$(f+g)(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}) + g(\boldsymbol{i})$$

と定義する. このとき. 写像

$$f+g : \mathbb{N}^n \longrightarrow R, \quad \boldsymbol{i} \longmapsto (f+g)(\boldsymbol{i}) \tag{1}$$

もまた $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元である. これを和として, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ における加法を定める.

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f が**定数**であるとは, R のある元 a が存在して, $\mathbb{N}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$f(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} a, & \boldsymbol{i} = (0, 0, \ldots, 0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

が成り立つときにいう. このような f を f_a と書くことにする.

[定理 1.1] $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ は加法群をなす.

[証明] $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ が加法群の定義を満たすことを 1 つ 1 つ確かめればよい.

結合法則：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, g, h と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(\boldsymbol{i}) &= (f+g)(\boldsymbol{i}) + h(\boldsymbol{i}) \\ &= (f(\boldsymbol{i}) + g(\boldsymbol{i})) + h(\boldsymbol{i}) \\ &= f(\boldsymbol{i}) + (g(\boldsymbol{i}) + h(\boldsymbol{i})) \\ &= f(\boldsymbol{i}) + (g+h)(\boldsymbol{i}) \\ &= (f+(g+h))(\boldsymbol{i}). \end{aligned}$$

ゆえに, $(f+g)+h = f+(g+h)$.

交換法則：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, g と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{i}) &= f(\boldsymbol{i}) + g(\boldsymbol{i}) \\ &= g(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{i}) \\ &= (g+f)(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

ゆえに, $f + g = g + f$.

単位元の存在：0 を R の零元とするとき，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の加法についての単位元は定数 f_0 である．実際，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$(f+f_0)(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}) + f_0(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}),$$
$$(f_0+f)(\boldsymbol{i}) = f_0(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}).$$

ゆえに, $f + f_0 = f_0 + f = f$.

逆元の存在：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f に対して，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 g を

$$g : \mathbb{N}^n \longrightarrow R, \quad \boldsymbol{i} \longmapsto -f(\boldsymbol{i})$$

と定義する．g は加法における f の逆元である．実際 $\mathbb{N}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$(f+g)(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}) + g(\boldsymbol{i}) = 0,$$
$$(g+f)(\boldsymbol{i}) = g(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{i}) = 0.$$

ゆえに, $f + g = g + f = f_0$.

以上より，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ が加法群をなすことが示された． □

2 級数の積

R を可換環, n を正の整数とする.

$\mathbb{Z}^n$ の元 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ に対して,

$$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = (i_1 + j_1, i_2 + j_2, \ldots, i_n + j_n)$$

と定める.

［補題 2.1］ m を正の整数, $k \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\mathbb{N}^m$ の元 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$$

を満たすものの個数 $p_{m,k}$ は有限である.

[証明] m に関する数学的帰納法によって証明する．

$m=1$ のとき，$p_{1,k}=1$ である．

$m=2$ のとき，k に対して

$$x+y=k$$

を満たす $\mathbb{N}^2$ の元 $(x,\, y)$ は

$$(0,k),\ (1,k-1),\ (2,k-2),\ \ldots,\ (k,0)$$

の $k+1$ 個である．

$m=3$ のとき，k に対して

$$x+y+z=k$$

を満たす $\mathbb{N}^3$ の元 $(x,\, y,\, z)$ の個数は，x を動かすとき

$$y+z=k-x$$

なる $\mathbb{N}^2$ の元 $(y,\, z)$ の個数すべての和に一致する．この場合

$$\begin{aligned}
&(0,*,*) \text{ なる形の元の個数は } p_{2,k} \text{ 個},\\
&(1,*,*) \text{ なる形の元の個数は } p_{2,k-1} \text{ 個},\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&(k,*,*) \text{ なる形の元の個数は } p_{2,0} \text{ 個}.
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
p_{3,k} &= p_{2,k}+p_{2,k-1}+\cdots+p_{2,0}\\
&=(k+1)+k+\cdots+1\\
&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2).
\end{aligned}$$

一般に，$m \geq 2$ のとき, k に対して

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=k$$

を満たす $\mathbb{N}^m$ の元 $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m)$ の個数は, x_m を動かすとき

$$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}=k-x_m$$

なる $\mathbb{N}^{m-1}$ の元 $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{m-1})$ の個数すべての和に一致する．すなわち,

$$p_{m,k}=p_{m-1,k}+p_{m-1,k-1}+\cdots+p_{m-1,0}.$$

したがって, m に関する帰納法により, $p_{m,k}$ が有限であることが示される． □

［補題 2.2］ m を正の整数とし，$\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ を $\mathbb{N}^n$ の元とする．このとき

$$S_{m,\boldsymbol{i}} = \{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_m) \in (\mathbb{N}^n)^m \mid \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 + \cdots + \boldsymbol{s}_m = \boldsymbol{i}\}$$

は有限集合である．

［証明］ $\mathbb{N}^n$ の m 個の元 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_m$ を

$$\boldsymbol{s}_l = (s_{l1}, s_{l2}, \ldots, s_{ln}) \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

とおく．$(\mathbb{N}^n)^m$ の元 $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_m)$ が $S_{m,\boldsymbol{i}}$ の元であるための必要十分条件は,

$$s_{1j} + s_{2j} + \cdots + s_{mj} = i_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つことである．一方，補題 2.1 より，$\mathbb{N}$ の任意の元 k に対して, $\mathbb{N}^m$ の元 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = k$$

を満たすものの個数は有限である．したがって, $S_{m,\boldsymbol{i}}$ の元は有限個しかない． □

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, g と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$(fg)(\boldsymbol{i}) = \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})g(\boldsymbol{t}) \tag{2}$$

と定義する．補題 2.2 より, 右辺は有限和である．このとき．写像

$$fg : \mathbb{N}^n \longrightarrow R, \quad \boldsymbol{i} \longmapsto (fg)(\boldsymbol{i}) \tag{3}$$

もまた $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元である．これを積として, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ における乗法を定める．

［定理 2.3］ $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ は可換環をなす.

［証明］ $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ が加法群になることは定理 1.1 で既に示されているので，あとは乗法が可換環の定義を満たしていることを確かめればよい.

結合法則：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)$ の元 f, g, h と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$\begin{aligned}
((fg)h)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}} (fg)(\boldsymbol{r})h(\boldsymbol{u}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{s})g(\boldsymbol{t}) \right) h(\boldsymbol{u}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})g(\boldsymbol{t})h(\boldsymbol{u}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s}) \left(\sum_{\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{t})h(\boldsymbol{u}) \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})(gh)(\boldsymbol{v}) \\
&= (f(gh))(\boldsymbol{i}).
\end{aligned}$$

ゆえに, $(fg)h = f(gh)$.

交換法則：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)$ の元 $f,\ g$ と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$\begin{aligned}(fg)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})g(\boldsymbol{t}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} g(\boldsymbol{t})f(\boldsymbol{s}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} g(\boldsymbol{s})f(\boldsymbol{t}) \\ &= (gf)(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

ゆえに, $fg = gf$.

分配法則：$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)$ の元 $f,\ g,\ h$ と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$\begin{aligned}((f+g)h)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} (f+g)(\boldsymbol{s})h(\boldsymbol{t}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} (f(\boldsymbol{s})+g(\boldsymbol{s}))h(\boldsymbol{t}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} (f(\boldsymbol{s})h(\boldsymbol{t})+g(\boldsymbol{s})h(\boldsymbol{t})) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})h(\boldsymbol{t}) + \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} g(\boldsymbol{s})h(\boldsymbol{t}) \\ &= (fh)(\boldsymbol{i}) + (gh)(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

ゆえに, $(f+g)h = fh + gh$. さらに, 積についての交換法則を 2 回用いれば,

$$f(g+h) = (g+h)f = gf + hf = fg + fh.$$

単位元の存在：R の乗法についての単位元を 1 とすると, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)$ の単位元は定数 f_1 である．実際, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)$ の元 f と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\begin{aligned}(ff_1)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})f_1(\boldsymbol{t}) \\ &= f(\boldsymbol{i})f_1(0,\ldots,0) + \sum_{\substack{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{t}\neq(0,0,\ldots,0)}} f(\boldsymbol{s})f_1(\boldsymbol{t}) \\ &= f(\boldsymbol{i})f_1(0,\ldots,0) \\ &= f(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

ゆえに, $ff_1 = f$.

以上より，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)$ が可換環をなすことが示された. □

［定理 2.4］ 定数全体の集合を $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)_{\mathrm{c}}$ とおく: $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\ R)_{\mathrm{c}} = \{f_a \mid a \in R\}$.

(i) $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{c}}$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)$ の部分環である.

(ii) $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{c}}$ と R とは同型である.

[証明] (i) $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{c}}$ は少なくとも定数 f_0 を含むので空集合でない.

R の元 $a,\,b$ と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\begin{aligned}(f_a - f_b)(\boldsymbol{i}) &= f_a(\boldsymbol{i}) - f_b(\boldsymbol{i}) \\ &= \begin{cases} a-b, & \boldsymbol{i} = (0,0,\ldots,0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに, $f_a - f_b = f_{a-b} \in C$. また,

$$\begin{aligned}(f_a f_b)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f_a(\boldsymbol{s}) f_b(\boldsymbol{t}) \\ &= \begin{cases} ab, & \boldsymbol{i} = (0,0,\ldots,0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに, $f_a f_b = f_{ab} \in C$. したがって, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{c}}$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)$ の部分環である.

(ii) 写像 $\phi : R \longrightarrow C,\ a \longmapsto f_a$ を考える.

ϕ の準同型性：R の任意の元 $a,\,b$ に対して,

$$\begin{aligned}(f_a + f_b)(\boldsymbol{i}) &= f_a(\boldsymbol{i}) + f_b(\boldsymbol{i}) \\ &= \begin{cases} a+b, & \boldsymbol{i} = (0,0,\ldots,0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに, $f_a + f_b = f_{a+b}$.

ϕ の単射性：R の元 a に対して,

$$\begin{aligned}f_a = f_b &\Longrightarrow f_{a-b} = f_a - f_b = f_0 \\ &\Longrightarrow a - b = 0 \\ &\Longrightarrow a = b.\end{aligned}$$

ϕ の全射性：定数の定義から明らか.

以上より, ϕ は環の同型写像である. □

定理 2.4 により, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{c}}$ を R と同一視するすることができる. そこで以後, 定数 f_a を単に a と書くことにする.

3　形式的冪級数

R を可換環, n を正の整数とする.

自然数 k $(1 \leq k \leq n)$ に対して，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 X_k を次のように定義する：

$$X_k : \mathbb{N}^n \longrightarrow R, \quad \boldsymbol{i} \longmapsto X_k(\boldsymbol{i}).$$

ただし,

$$X_k(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{i} = (\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{k}, 0, \ldots, 0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

この X_1, X_2, ..., X_k を**変数**あるいは**不定元**という.

［定理 3.1］ e を正の整数とし，f_1, f_2, ..., f_e を $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元とする[1]. $\mathbb{N}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$(f_1 f_2 \cdots f_e)(\boldsymbol{i}) = \sum_{\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{i}} f_1(\boldsymbol{r}_1) \cdots f_e(\boldsymbol{r}_e)$$

が成り立つ.

［証明］ e に関する数学的帰納法により証明する．積の定義から $e = 2$ のときは成り立つ．一般に, $e > 2$ のとき，帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 \cdots f_e)(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{i}} (f_1 f_2 \cdots f_{e-1})(\boldsymbol{s}) f_e(\boldsymbol{r}_e) \\ &= \sum_{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{i}} \left(\sum_{\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_{e-1} = \boldsymbol{s}} f_1(\boldsymbol{r}_1) \cdots f_{e-1}(\boldsymbol{r}_{e-1}) \right) f_e(\boldsymbol{r}_e) \\ &= \sum_{\boldsymbol{r}_1 + \cdots + \boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{i}} f_1(\boldsymbol{r}_1) \cdots f_e(\boldsymbol{r}_e) \end{aligned}$$

となる. □

各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $X_k^0 = 1$ と定める.

e を自然数とする．このとき, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 X_k^e は，定理 3.1 より，$\mathbb{N}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\begin{aligned} X_k^e(\boldsymbol{i}) &= (\overbrace{X_k \cdots X_k}^{e})(\boldsymbol{i}) \\ &= \begin{cases} 1, & \boldsymbol{i} = (\overbrace{0, \ldots, 0, e}^{k}, 0, \ldots, 0) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \end{aligned}$$

となるような写像である.

---

[1] ただし，f_1, f_2, ..., f_e は $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元に番号をつけたものであり，定数とは限らない.

さらに, a を R の元, e_1, e_2, ..., e_n を自然数とするとき, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 $aX^{e_1}\cdots X_n^{e_n}$ は，定理 3.1 より，$\mathbb{N}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{i}$ に対して

$$aX_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n} = \begin{cases} a, & \boldsymbol{i} = (e_1,\, \ldots,\, e_n) \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

となるような写像である．この形で表される $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元を**単項式**という.

単項式 $aX_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n} \neq 0$ に対して, $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ をこの単項式の**次数**という.

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 f と $\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i} = (i_1,\, \ldots,\, i_n)$ に対して,

$$a_{\boldsymbol{i}} = f(\boldsymbol{i}) \ (\in R)$$

とおく．このとき

$$f(\boldsymbol{i}) = a_{\boldsymbol{i}} = a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}(\boldsymbol{i}).$$

一方，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 $a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ は，$\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{j}$ について

$$\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i} \Longrightarrow a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}(\boldsymbol{j}) = 0.$$

そこで，$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 f を

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \tag{4}$$

で表す．また, f のことを $f(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n)$ のように変数を明示して書くこともある.

$n = 1$ のとき, すなわち f が 1 変数の形式的冪級数であるとき, (4) は

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$$

となるが, そのほかに,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

あるいは

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$$

などといった書き方をすることもある.

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元 f を (4) の形で表したとき, 各々の $a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ を f の**項**といい, $a_{\boldsymbol{i}}$ をその項の**係数**という．特に, $\boldsymbol{i} = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0)$ なる項を**定数項**という.

［注意 3.1］ (4) は, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元を記号 $\sum$ を用いて形式的に表したにすぎず, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\, R)$ の元が単項式の無限和で表されると主張しているわけではない.

直感的には，$\mathbb{N}^n$ の元 $\boldsymbol{i}$ に対して,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}}X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n}\right)(\boldsymbol{i}) &= (a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n})(\boldsymbol{i}) + \left(\sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{i}} a_{\boldsymbol{j}}X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n}\right)(\boldsymbol{i}) \\ &= (a_{\boldsymbol{i}}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n})(\boldsymbol{i}) \\ &= a_{\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

であるから,

$$f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

となる，という具合である．けれども，このような操作はあくまで記号の形式的な書き換えである.

次の定理は, Map($\mathbb{N}^n$, R) の元についての基本的な性質を，(4) の記法を使って書き直したものである:

[定理 3.2] (i) $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} = 0 \Longleftrightarrow a_{\boldsymbol{i}} = 0\ (\forall \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n).$

(ii) $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} + \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} b_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} (a_{\boldsymbol{i}} + b_{\boldsymbol{i}}) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$

(iii) $\displaystyle\left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}\right)\left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} b_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}\right) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} a_{\boldsymbol{s}} b_{\boldsymbol{t}}\right) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$

[証明] (i) は, f を Map($\mathbb{N}^n$, R) の元とすると,

$$f = 0 \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{i}) = 0\ (\forall \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n)$$

を意味する．(ii), (iii) は, それぞれ Map($\mathbb{N}^n$, R) における和および積の定義を言い換えたものである． □

Map($\mathbb{N}^n$, R) に (1), (3) のようにして和と積を定義して構成した可換環を, R の元を係数とする n 変数の**形式的冪級数環**といい,

$$R[[X_1, \ldots, X_n]]$$

で表す．また, $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元を**形式的冪級数**という.

[注意 3.2] $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元 f は $\mathbb{N}^n$ から R への写像であるから，集合としては直積集合 $\prod_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} R$ と同じである．しかしながら, 環として見るとき，直積集合に自然に導入される代数的構造[2)] と $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ のそれとは乗法の定め方で区別される.

[例 3.1] 以下は, 有理数を係数とする 1 変数の形式的冪級数である.

$$\exp(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i = 1 + X + \frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots,$$

$$\log(1 + X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} X^i = X - \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3} X^3 - \cdots.$$

[2)] 各成分ごとの積によって乗法を定める.

[例 3.2] R を可換環とし, $\mathbb{Q}$ を部分体として含むとする. $\alpha \in R$ とし,

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

とする. このとき, R の元を係数とする 1 変数の形式的冪級数

$$(1+X)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} X^i.$$

が定まる.

[定理 3.3] $n \geq 2$ を整数, R を可換環とする. このとき, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$R[[X_1, \ldots, X_n]] \cong (R[[X_1, \ldots, X_r]])[[X_{r+1}, \ldots, X_n]]$$

が成り立つ.

[証明] $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の各々の元

$$\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} \tag{5}$$

に対して, $(R[[X_1, \ldots, X_r]])[[X_{r+1}, \ldots, X_n]]$ の元

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^{n-r}} \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^r} a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} X_1^{j_1} \cdots X_r^{j_r} \right) X_{r+1}^{k_{r+1}} \cdots X_n^{k_n} \tag{6}$$

を対応させる写像を ϕ とする. (6) に対して (5) を対応させる写像が ϕ の逆写像になるので, ϕ は全単射である.

$R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元

$$f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n},$$
$$g = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} b_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

を任意にとる. また,

$$f_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^r} a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} X_1^{j_1} \cdots X_r^{j_r},$$
$$g_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^r} b_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} X_1^{j_1} \cdots X_r^{j_r}$$

とおく. このとき, 各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^{n-r}$ に対して

$$f_{\boldsymbol{k}} + g_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^r} (a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}) X_1^{j_1} \cdots X_r^{j_r}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\phi(f+g) &= \phi\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}^n}(a_{\boldsymbol{i}}+b_{\boldsymbol{i}})X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^r}(a_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}+b_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}})X_1^{j_1}\cdots X_r^{j_r}\right)X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}(f_{\boldsymbol{k}}+g_{\boldsymbol{k}})X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}f_{\boldsymbol{k}}X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}+\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}g_{\boldsymbol{k}}X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \phi(f)+\phi(g).\end{aligned}$$

また, 各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\mathbb{N}^{n-r}$ に対して

$$f_{\boldsymbol{u}}g_{\boldsymbol{v}}=\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^r}\left(\sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{j}}a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}}b_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}}\right)X_1^{j_1}\cdots X_r^{j_r}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\phi(fg) &= \phi\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}^n}\left(\sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}}a_{\boldsymbol{s}}b_{\boldsymbol{t}}\right)X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^r}\left(\sum_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}}\left(\sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{j}}a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}}b_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}}\right)\right)X_1^{j_1}\cdots X_r^{j_r}\right)X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}\left(\sum_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}}\left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^r}\left(\sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{j}}a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}}b_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}}\right)X_1^{j_1}\cdots X_r^{j_r}\right)\right)X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}\left(\sum_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{u}}g_{\boldsymbol{v}}\right)X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\\ &= \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}f_{\boldsymbol{k}}X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\right)\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^{n-r}}g_{\boldsymbol{k}}X_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots X_n^{k_n}\right)\\ &= \phi(f)\phi(g).\end{aligned}$$

ゆえに, ϕ は準同型写像である. □

[定理 3.4] R が整域ならば, $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ も整域である.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.

$n=1$ のとき. $R[[X]]$ の元 $f=\sum_{i\in\mathbb{N}}a_iX^i$, $g=\sum_{i\in\mathbb{N}}b_iX^i$ はともに 0 でないとし, a_k, b_l をそれぞれ 0 でない最初の係数とする. このとき,

$$fg=\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{s+t=i}a_sb_t\right)X^i$$

の X^{k+l} の係数を見ると, $a_k b_l \neq 0$ かつ $a_k b_l$ 以外の項はすべて 0 である. したがって, $fg \neq 0$.

一般に, $n-1$ のとき定理の主張が正しいと仮定すると, 定理 3.3 と $n=1$ のときの議論より, n のときも正しいことがいえる. $\square$

[定理 3.5] $f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$ を $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(i) $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ において f は乗法についての逆元をもつ.

(ii) R において $a_{\mathbf{0}}$ は乗法についての逆元をもつ. ここで, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ とする.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.

$n=1$ のとき.

(i)⇒(ii)　$R[[X]]$ において f が乗法についての逆元をもつとすると, ある $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i \in R[[X]]$ が存在して,

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i\right) = 1.$$

定数項を比較すると, $a_0 b_0 = 1$ となる. ゆえに, R において a_0 は乗法についての逆元をもつ.

(ii)⇒(i)　a_0 が R の可逆元であるとする. このとき,

$$b_0 = a_0^{-1},$$
$$b_i = -a_0^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{i} a_s b_{i-s} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

によって R の元の列 $(b_i \mid i \in \mathbb{N})$ を定めると,

$$a_0 b_0 = 1, \quad \sum_{s=0}^{i} a_s b_{i-s} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

だから,

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i\right)\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}}\left(\sum_{s=0}^{i} a_s b_{i-s}\right) = 1.$$

したがって, $R[[X]]$ において f は乗法についての逆元をもつ.

一般の場合を証明するために, $n-1$ のとき定理の主張が正しいと仮定する.

$R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元

$$f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

が逆元をもつための必要十分条件は, 定理 3.3 と $n=1$ のときの議論より,

$$\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{\boldsymbol{j},0} X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_{n-1}^{j_{n-1}}$$

が $R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ において逆元をもつことである. 帰納法の仮定より, このことは $a_{\mathbf{0}}$ が R において逆元をもつことと同値である. $\square$

定理 3.5 より,

$$R[[X_1,\dots,X_n]]^\times = \left\{ \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n} \in R[[X_1,\dots,X_n]] \;\middle|\; a_{\boldsymbol{0}} \in R^\times \right\}$$

と書ける.

[例 3.3] $1-X$ の $R[[X]]$ における逆元は,

$$\sum_{i=0}^{\infty} X^i = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$$

である. また, $1+X$ の $R[[X]]$ における逆元は,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i X^i = 1 - X + X^2 - X^3 + \cdots$$

である.

形式的冪級数 $f = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n} \neq 0$ に対して,

$$\operatorname{ord} f = \min\left\{ \sum_{k=1}^{n} i_k \;\middle|\; a_{\boldsymbol{i}} \neq 0 \right\}$$

と定める. $\operatorname{ord} f$ を f の**位数**という. すなわち, f の中に現れる 0 でない係数をもつ項の次数の最小値を f の位数とする. 0 の位数は ∞ と定める. したがって, $\operatorname{ord} f$ の値は負でない整数か ∞ である.

[定理 3.6] $f,\, g \in R[[X_1,\,\dots,\,X_n]]$ とする.

(i) $\operatorname{ord}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord} f,\, \operatorname{ord} g\}$. さらに, $\operatorname{ord} f \neq \operatorname{ord} g$ ならば等号が成り立つ.

(ii) $\operatorname{ord}(fg) \geq \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g$. さらに, R が整域ならば等号が成り立つ.

(iii) $f \in R[[X_1,\,\dots,\,X_n]]^\times$ ならば $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f^{-1} = 0$.

(iv) R は体であるとする. このとき, $\operatorname{ord} f = 0$ ならば $f \in R[[X_1,\,\dots,\,X_n]]^\times$.

[証明] $m = \operatorname{ord} f$, $m' = \operatorname{ord} g$ とおく. $m \leq m'$ と仮定しても一般性を失わない. また,

$$f = f_m + (m+1\text{ 次以上の項}), \qquad f_m \neq 0,$$
$$g = g_{m'} + (m'+1\text{ 次以上の項}), \quad g_{m'} \neq 0$$

と表す. ただし, f_m は f の中に現れる m 次の項すべての和であり, $g_{m'}$ についても同様である.

(i) $f+g$ は

$$f + g = f_m + g_m + (m+1\text{ 次以上の項})$$

と表せるから, (i) の前半の不等式が成り立つ. さらに, $m < m'$ ならば, $g_m = 0$ である. すなわち, $f_m + g_m = f_m \neq 0$ であるから, $\operatorname{ord}(f+g) = \operatorname{ord} f$ となる.

(ii)　fg は

$$fg = f_m g_{m'} + (m + m' + 1 \text{ 次以上の項})$$

と表せるから, (ii) の前半の不等式が成り立つ．さらに, R が整域ならば, 定理 3.4 より $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ も整域である．よって, $f_m g_{m'} \neq 0$ となり, $\mathrm{ord}(fg) = m + m'$ がいえる．

(iii)　$f \in R[[X_1, \ldots, X_n]]^\times$ とすると, 定理 3.5 より

$$f = a_0 + (1 \text{ 次以上の項}), \quad a_0 \in R^\times.$$

また, $ff^{-1} = 1$ であり, この式の定数項を比較すれば, f^{-1} の定数項は a_0^{-1} である． ゆえに, $\mathrm{ord}\, f = \mathrm{ord}\, f^{-1} = 0$.

(iv)　R は体であるとし, $\mathrm{ord}\, f = 0$ とする．R の 0 でないすべての元は乗法についての逆元をもち, f の定数項は 0 でないから, 定理 3.5 より $f \in R[[X_1, \ldots, X_n]]^\times$ が得られる．　□

定数項が 0 であるような形式的冪級数の全体を $R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$ で表す:

$$R[[X_1, \ldots, X_n]]_0 = \{f \in R[[X_1, \ldots, X_n]] \mid \mathrm{ord}\, f \geq 1\}.$$

[定理 3.7] $R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$ は $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ のイデアルである．

[証明] $R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$ は 0 を含むから空集合でない.

$f, g \in R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$, $h \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$ とする．定理 3.6 より,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}\, f, \mathrm{ord}\, g\} \geq 1, \\
&\mathrm{ord}(-g) = \mathrm{ord}\, g \geq 1, \\
&\mathrm{ord}(hf) \geq \mathrm{ord}\, h + \mathrm{ord}\, f \geq 1
\end{aligned}$$

であるから, $f + g, -g, hf \in R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$. ゆえに, $R[[X_1, \ldots, X_n]]_0$ は $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ のイデアルである．　□

$R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元 f, g と整数 $d \geq 0$ に対して,

$$f \equiv g \ (\mathrm{mod}\, \deg d) \iff \mathrm{ord}(f - g) \geq d$$

と定める．これは $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ における同値関係である．また, このことは f と g の $d-1$ 次以下の項がすべて等しいことと同値である．$n = 1$ のときは,

$$f \equiv g \ (\mathrm{mod}\, \deg d) \iff f - g \in X^d R[[X]]$$

と言い換えられる.

[定理 3.8] $f, g \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$ とする．このとき, $f = g$ であるための必要十分条件は, すべての整数 $d \geq 0$ に対して $f \equiv g \ (\mathrm{mod}\, \deg d)$ が成り立つことである．

[証明] 条件の必要性は明らかだから, 十分性のみ証明する.

$f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$, $g = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} b_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$ とおくと,

$$f - g = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} (a_{\boldsymbol{i}} - b_{\boldsymbol{i}}) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}.$$

このとき, 各 $d \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} f \equiv g \pmod{\deg d} &\Longrightarrow \operatorname{ord}(f - g) \geq d \\ &\Longrightarrow a_{\boldsymbol{i}} - b_{\boldsymbol{i}} = 0 \ (i_1 + i_2 + \cdots + i_n < d \text{ のとき}). \end{aligned}$$

d は任意だから, すべての $\boldsymbol{i}$ に対して $a_{\boldsymbol{i}} - b_{\boldsymbol{i}} = 0$ が成り立ち, $f = g$ となる. □

4 無限和と代入

R を可換環, n を正の整数とする.

Λ を添字の無限集合とし, $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元の列とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$f_\lambda = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}}^{(\lambda)} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

とおく. さらに, 各 $\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n$ に対して,

$$\Lambda_{\boldsymbol{i}} = \{\lambda \in \Lambda \mid a_{\boldsymbol{i}}^{(\lambda)} \neq 0\}$$

とおく. このとき, 条件

(S) 任意の $\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n$ に対して, $|\Lambda_{\boldsymbol{i}}| < \infty$.

を満たせば, 各 $\boldsymbol{i}$ に対して $\sum_{\lambda \in \Lambda_{\boldsymbol{i}}} a_{\boldsymbol{i}}^{(\lambda)}$ は有限和である. よって, 新たな $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元

$$\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_{\boldsymbol{i}}} a_{\boldsymbol{i}}^{(\lambda)} \right) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

が定まる. これを $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ の**無限和**といい, $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ と書く. また, 条件 (S) が成り立つとき, $(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ は**総和可能**であるという.

$f_1, f_2, \ldots, f_m \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$, $g \in R[[Y_1, \ldots, Y_m]]$ とし[3],

$$g = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m} b_{\boldsymbol{j}} Y_1^{j_1} Y_2^{j_2} \cdots Y_m^{j_m}$$

とおく. もし, $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元の列

$$(b_{\boldsymbol{j}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \cdots f_m^{j_m} \mid \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m)$$

[3] $R[[Y_1, \ldots, Y_m]]$ の特別な場合として $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ 自身も含まれる.

が総和可能, すなわち条件 (S) を満たすならば, その無限和

$$\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^m} b_{\boldsymbol{j}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \cdots f_m^{j_m} \in R[[X_1,\,\ldots,\,X_n]]$$

が定まる. これを $f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m$ の g への**代入**といい,

$$g(f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m)$$

で表す.

$f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m \in R[[X_1,\,\ldots,\,X_n]]_0$, $g \in R[[Y_1,\,\ldots,\,Y_m]]$ のとき, 各 $\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m$ に対して, 定理 3.6 より

$$\begin{aligned}&\mathrm{ord}(b_{\boldsymbol{j}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \cdots f_m^{j_m})\\ &\qquad \geq \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ord}\, f_k^{j_k} \geq j_1 + j_2 + \cdots + j_m\end{aligned}$$

であるから, 列 $(b_{\boldsymbol{j}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \cdots f_m^{j_m} \mid \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m)$ は総和可能である. したがって, $f_1,\,f_2,\,\ldots,\,f_m$ の g への代入が可能である.

特に, $0,\,0,\,\ldots,\,0$ の g への代入 $g(0,\,0,\,\ldots,\,0)$ は, g の定数項 $b_{\boldsymbol{0}}$ に一致する.

5　多項式

R を可換環, n を正の整数とする.

［定理 5.1］ $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)$ の部分集合

$$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{pol}} = \{f \in M \mid \text{有限個の } \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n \text{ を除いて } f(\boldsymbol{i}) = 0\}$$

は, 和と積を (1), (3) のように定義した環として $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)$ の部分環をなす.

［証明］ まず, $\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{pol}}$ は明らかに 0 を含むから, 空集合でない.

$f,\,g \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{pol}}$ とすると, ある自然数 c が存在して, $\mathbb{N}^n$ のすべての元 $\boldsymbol{i} = (i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n)$ に対して,

$$i_k > c\ (k = 1,\,2,\,\ldots,\,n) \Longrightarrow f(\boldsymbol{i}) = g(\boldsymbol{i}) = 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}&i_k > c\ (k = 1,\,2,\,\ldots,\,n) \Longrightarrow (f-g)(\boldsymbol{i}) = f(\boldsymbol{i}) - g(\boldsymbol{i}) = 0,\\ &i_k > 2c\ (k = 1,\,2,\,\ldots,\,n) \Longrightarrow (fg)(\boldsymbol{i}) = \sum_{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}} f(\boldsymbol{s})g(\boldsymbol{t}) = 0.\end{aligned}$$

ゆえに, $f-g,\,fg \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}^n,\,R)_{\mathrm{pol}}$ が成り立つ. □

$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, R)_{\mathrm{pol}}$ を, R の元を係数とする n 変数の**多項式環**といい,

$$R[X_1, \ldots, X_n]$$

で表す．また, $R[X_1, \ldots, X_n]$ の元を**多項式**という．

［例 5.1］ m を正の整数とする．このとき,

$$\binom{m}{i} = \begin{cases} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!}, & i = 1, 2, \ldots \text{ のとき} \\ 1, & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は, $0 \leq i \leq m$ のときは m 個のものの中から i 個を選び出す場合の数であり, $i > m$ のときは 0 である．したがって,

$$(1+X)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} X^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} X^i$$

は整数を係数とする 1 変数の多項式である．

［定理 5.2］ $r = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$R[X_1, \ldots, X_n] \cong (R[X_1, \ldots, X_r])[X_{r+1}, \ldots, X_n]$$

が成り立つ．

［証明］ 定理 3.3 の証明において，写像 ϕ の $R[X_1, \ldots, X_n]$ への制限を考えたとき，その像が $(R[X_1, \ldots, X_r])[X_{r+1}, \ldots, X_n]$ になることに注意すれば, 同様にして証明できる． □

［定理 5.3］ R が整域ならば, $R[X_1, \ldots, X_n]$ も整域である．

［証明］ R が整域ならば, 定理 3.4 より形式的冪級数環 $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ は整域である．多項式環 $R[X_1, \ldots, X_n]$ は $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の部分環であり, 整域の部分環は整域であるから, $R[X_1, \ldots, X_n]$ もまた整域である．

あるいは, 定理 3.4 と同様にして直接証明することもできる． □

多項式 $f = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \neq 0$ に対して,

$$\deg f = \max \left\{ \sum_{k=1}^{n} i_k \;\middle|\; a_{\boldsymbol{i}} \neq 0 \right\}$$

と定める．$\deg f$ を f の**次数**という．すなわち, f の中に現れる 0 でない係数をもつ項の次数の最大値を f の次数とする．0 の次数は $-\infty$ と定める．

多項式 $f \neq 0$ が m 次の**斉次多項式**あるいは**同次多項式**であるとは, f の中に現れる単項式の次数がすべて m であるときにいう．

[定理 5.4] $f,\, g \in R[X_1, \ldots, X_n]$ とする.

(i) $\deg(f+g) \le \max\{\deg f,\, \deg g\}$. さらに, $\deg f \ne \deg g$ ならば等号が成り立つ.

(ii) $\deg(fg) \le \deg f + \deg g$. さらに, R が整域ならば等号が成り立つ.

[証明] $m = \deg f$, $m' = \deg g$ とおく. $m \le m'$ と仮定しても一般性を失わない. また,

$$f = (m-1\,\text{次以下の項}) + f_m, \qquad f_m \ne 0,$$
$$g = (m'-1\,\text{次以下の項}) + g_{m'}, \quad g_{m'} \ne 0$$

と表す. ただし, f_m は f の中に現れる m 次の項すべての和であり, $g_{m'}$ についても同様である. 便宜上, $f_i = 0\,(m < i \le m')$ としておく.

(i) $f+g$ は

$$f+g = (m-1\,\text{次以下の項}) + f_{m'} + g_{m'}$$

と表せるから, (i) の前半の不等式が成り立つ. さらに, $m < m'$ ならば, $f_{m'} = 0$ である. すなわち, $f_{m'} + g_{m'} = g_{m'} \ne 0$ であるから, $\deg(f+g) = \deg g$ となる.

(ii) fg は

$$fg = (m+m'-1\,\text{次以下の項}) + f_m g_{m'}$$

と表せるから, (ii) の前半の不等式が成り立つ. さらに, R が整域ならば, 定理5.3 より $R[X_1, \ldots, X_n]$ も整域である. よって, $f_m g_{m'} \ne 0$ となり, $\deg(fg) = m + m'$ がいえる. $\square$

$f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m \in R[[X_1,\, \ldots,\, X_n]]$, $g \in R[Y_1,\, \ldots,\, Y_m]$ とし,

$$g = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m} b_{\boldsymbol{j}} Y_1^{j_1} Y_2^{j_2} \cdots Y_m^{j_m}$$

とおく. g は多項式なので, $\deg g$ より大きい次数の項はすべて 0 であり, g に現れる 0 でない項の数は有限個である. ゆえに, 列 $(b_{\boldsymbol{j}} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \cdots f_m^{j_m} \mid \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^m)$ は総和可能である. したがって, f_1, f_2, $\ldots$, f_m の g への代入が可能である (§4).

特に, R の元は常に R 係数の多項式へ代入可能である. f を $R[X_1,\, \ldots,\, X_n]$ の元とするとき, R の元 $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n$ の f への代入

$$f(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{i}} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n} \in R$$

を, f の $(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n) \in R^n$ における**値**という.

$(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n) \in R^n$ が f の**零点**であるとは, $f(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n) = 0$ となるときにいう. 特に, $n = 1$ のとき, すなわち f が 1 変数であるとき, その零点を f の**根**という.

[注意 5.1] 数学 (特に代数学) では, 零点 (あるいは根) がどこの環で存在するのかがしばしば問題になる. そのため, 例えば $\mathbb{C}$ を複素数体, $\mathbb{R}$ を実数体, $f \in \mathbb{R}[X]$ とし, $\alpha \in \mathbb{C}$ が $f(\alpha) = 0$ を満たすとき, f は「$\mathbb{C}$ において」根をもつといい, α は f の「$\mathbb{C}$ における」根であるという言い方をする.

6　Laurent 展開

K を体, n を正の整数とする.

定理 3.4 より形式的冪級数環 $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ は整域であるから, その商体が存在する. それを K 上の**形式的冪級数体**といい, $K((X_1, \ldots, X_n))$ で表す.

また, 多項式環 $K[X_1, \ldots, X_n]$ は $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ の部分整域である. その商体を K 上の**有理関数体**といい, $K(X_1, \ldots, X_n)$ で表す. また, その元を**有理式**という.

$K(X_1, \ldots, X_n)$ は $K((X_1, \ldots, X_n))$ の部分体である.

$K(X_1, \ldots, X_n)$ の任意の元は,

$$\frac{g}{h}, \quad g, h \in K[X_1, \ldots, X_n], \quad h \neq 0$$

の形に表される. このうち, $\operatorname{ord} h = 0$ となるもの全体を S とすると, S は $K(X_1, \ldots, X_n)$ の部分環になる. このとき, $v \in K[[X_1, \ldots, X_n]]^\times$ だから, 写像

$$S \longrightarrow K[[X_1, \ldots, X_n]], \quad \frac{g}{h} \longmapsto gh^{-1}$$

が定まり, これは環の同型写像になる. $g/h \in S$ に対して, gh^{-1} を有理式 g/h の**展開**という.

1 変数の場合には, より著しい結果が得られる.

[定理 6.1] $K((X))$ の 0 でないすべての元 f は,

$$f = X^k u, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad u \in K[[X]], \quad \operatorname{ord} u = 0 \tag{7}$$

の形に一意的に表される.

[証明] $K((X))$ は $K[[X]]$ の商体だから, $f = g/h$, $g, h \in K[[X]]$, $g \neq 0$, $h \neq 0$ と表せる. さらに,

$$g = X^r g_1, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{ord} g_1 \neq 0,$$
$$h = X^s h_1, \quad s \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{ord} h_1 \neq 0$$

と表せる. ゆえに,

$$f = X^{r-s} g_1 h_1^{-1}, \quad g_1 h_1^{-1} \in K[[X]], \quad \operatorname{ord}(g_1 h_1^{-1}) = 0$$

となる.

f が 2 通りに

$$f = X^{k_1} u_1 = X^{k_2} u_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \quad u_1, u_2 \in K[[X]], \quad \operatorname{ord} u_1 = \operatorname{ord} u_2 = 0$$

と表されたとすると,

$$X^{k_1 - k_2} = u_2 u_1^{-1} \in K[[X]], \quad \operatorname{ord} u_2 u_1^{-1} = 0$$

であるから, $k_1 - k_2 = 0$. ゆえに, $u_2 u_1^{-1} = 1$ となる. したがって, f を (7) の形で表す仕方は一意的である. □

[注意 6.1] 定理 6.1 を 2 変数以上の場合に拡張することはできない. 例えば, $u(X, Y) \in K[[X, Y]]$ と整数 $m > 0$ で

$$\frac{1}{X+Y} = (XY)^{-m}u(X, Y)$$

を満たすものは存在しない. なぜなら, もし仮にそのような $u(X, Y)$ と $m > 0$ が存在すれば,

$$X^m Y^m = u(X, Y)(X+Y)$$

が成り立つ. 左辺は 0 でないから, $u(X, Y) \neq 0$ でなければならない. よって, $u(X, Y)$ の中には $a_{\boldsymbol{i}} X^{i_1} Y^{i_2} \neq 0$ なる項が必ず現れる. $i_1 \geq i_2$ のとき右辺には $a_{\boldsymbol{i}} X^{i_1+1} Y^{i_2}$ なる項が現れ, $i_1 < i_2$ のとき右辺には $a_{\boldsymbol{i}} X^{i_1} Y^{i_2+1}$ なる項が現れることになって, どちらにしても矛盾が生じる.

(7) において, $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \ (a_0 \neq 0)$ とおけば,

$$f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{k+i} = a_0 X^k + a_1 X^{k+1} + \cdots$$

のように表せる. この表し方を f の **Laurent 展開**という. また, 右辺の形で表された $K((X))$ の元のことを**形式的 Laurent 級数**という. さらに, k を f の**位数**といい, $\operatorname{ord} f$ で表す. $\operatorname{ord} f$ の値は整数または ∞ である. $f \in K[[X]]$ のときは §3 において定義した位数の定義に一致する.

7 形式的微分

R を可換環とする.

$R[[X]]$ の元 $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ に対して, $R[[X]]$ の元 $f'(X)$ を

$$\begin{aligned} f'(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} X^i \\ &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots \end{aligned}$$

によって定める. $f'(X)$ を $f(X)$ の**形式的微分**という. $f'(X)$ を $\dfrac{df}{dX}$ とも書く.

形式的微分の定め方から,

$$\operatorname{ord} f' \geq 1 \Longrightarrow \operatorname{ord} f' \geq \operatorname{ord} f - 1 \tag{8}$$

であることがすぐにわかる.

$f(X) \in R[X]$ ならば, $f'(X) \in R[X]$ であり,

$$\deg f \geq 1 \Longrightarrow \deg f' \leq \deg f - 1 \tag{9}$$

が成り立つ.

[注意 7.1] 任意の整数 $m > 0$ と R の任意の元 $a \neq 0$ に対して $ma \neq 0$ であれば, (8), (9) における $\Longrightarrow$ の右側の式は等号にできる.

一方, ある整数 $m > 0$ と R のある元 $a \neq 0$ が存在して $ma = 0$ であれば, $(aX^m)' = maX^{m-1} = 0$. したがって, (8), (9) における $\Longrightarrow$ の右側の式は一般には等号にならない.

[定理 7.1] $f(X), g(X) \in R[[X]]$, $c \in R$ とする.

(i) $(cf(X))' = cf'(X)$.

(ii) $(f(X) + g(X))' = f'(X) + g'(X)$.

(iii) $(f(X)g(X))' = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$.

[証明] $f(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$, $g(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f'(X) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) a_{i+1} X^i, \\
g'(X) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) b_{i+1} X^i, \\
(cf(X))' &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} c a_i X^i \right)' = \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) c a_{i+1} X^i, \\
f(X) + g(X) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i) X^i, \\
(f(X) + g(X))' &= \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1)(a_{i+1} + b_{i+1}) X^i.
\end{aligned}$$

係数を比較すれば, (i), (ii) の等式が得られる. また,

$$\begin{aligned}
f(X)g(X) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{s+t=i} a_s b_t \right) X^i, \\
(f(X)g(X))' &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left((i+1) \sum_{s+t=i+1} a_s b_t \right) X^i, \\
f'(X)g(X) &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) a_{i+1} X^i \right) \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i \right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{s+t=i} (s+1) a_{s+1} b_t \right) X^i, \\
f(X)g'(X) &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i \right) \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) b_{i+1} X^i \right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{s+t=i} a_s (t+1) b_{t+1} \right) X^i.
\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s+t=i}(s+1)a_{s+1}b_t+\sum_{s+t=i}a_s(t+1)b_{t+1}\\
&\quad=\sum_{s+t=i+1}sa_sb_t+\sum_{s+t=i+1}ta_sb_t\\
&\quad=\sum_{s+t=i+1}(s+t)a_sb_t=(i+1)\sum_{s+t=i+1}a_sb_t.
\end{aligned}$$

これより, 係数を比較すれば, (iii) の等式が得られる. □

[定理 7.2] $f(X)\in R[[X]]$, $g(Y)\in R[Y]$ とする. このとき,

$$\big(g(f(X))\big)'=g'(f(X))f'(X)$$

が成り立つ.

[証明] $g(Y)=\sum_{j=0}^{d}b_jY^j$ とおくと,

$$g(f(X))=\sum_{j=0}^{d}b_jf(X)^j.$$

定理 7.1 より,

$$\begin{aligned}
\big(g(f(X))\big)'&=\sum_{j=1}^{d}b_j(f(X)^j)'\\
&=\sum_{j=1}^{d}b_j\big(jf(X)^{j-1}f'(X)\big)\\
&=\left(\sum_{j=1}^{d}jb_jf(X)^{j-1}\right)f'(X)\\
&=\left(\sum_{j=0}^{d-1}(j+1)b_{j+1}f(X)^j\right)f'(X)\\
&=g'(f(X))f'(X)
\end{aligned}$$

となる. □

[定理 7.3] $f(X)\in R[[X]]_0$, $g(Y)\in R[[Y]]$ とする. このとき,

$$\big(g(f(X))\big)'=g'(f(X))f'(X)$$

が成り立つ.

[証明] $g(Y)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j Y^j$ とおくと,

$$g(f(X))=\sum_{j=0}^{\infty} b_j f(X)^j.$$

各 $d \in \mathbb{N}$ に対して,

$$g_d(Y)=\sum_{j=0}^{d} b_j Y^j$$

とおくと, $\operatorname{ord} f \geq 1$ より,

$$g(f(X)) \equiv g_d(f(X)) \pmod{\deg d+1}.$$

形式的微分を考えると,

$$\bigl(g(f(X))\bigr)' \equiv \bigl(g_d(f(X))\bigr)' \pmod{\deg d}.$$

右辺に定理 7.2 を適用すると,

$$\bigl(g(f(X))\bigr)' \equiv g_d'(f(X))f'(X) \pmod{\deg d}.$$

一方,

$$g'(f(X))=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)b_{j+1}f(X)^j,$$
$$g_d'(f(X))=\sum_{j=0}^{d-1}(j+1)b_{j+1}f(X)^j$$

であるから, 再び $\operatorname{ord} f \geq 1$ より,

$$\begin{aligned} &g'(f(X))f'(X)-g_d'(f(X))f'(X) \\ &\qquad = \bigl(g'(f(X))-g_d'(f(X))\bigr)f'(X) \in X^d R[[X]]. \end{aligned}$$

すなわち,

$$g'(f(X))f'(X) \equiv g_d'(f(X))f'(X) \pmod{\deg d}.$$

ゆえに,

$$g(f(X)) \equiv g'(f(X))f'(X) \pmod{\deg d}.$$

これがすべての $d \in \mathbb{N}$ に対して成り立つから, 定理 3.8 より,

$$g(f(X))=g'(f(X))f'(X)$$

となる. □

［例 7.1］ $\mathbb{Q}[[X]]$ において, $\exp(X)$ の形式的微分は $\exp(X)$ 自身である．実際,

$$\begin{aligned}\bigl(\exp(X)\bigr)' &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{1}{(i+1)!}X^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X^i = \exp(X).\end{aligned}$$

［例 7.2］ $\mathbb{Q}[[X]]$ において, $\log(1+X)$ の形式的微分は $(1+X)^{-1}$ である．実際,

$$\begin{aligned}\bigl(\log(1+X)\bigr)' &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{(-1)^i}{i+1}X^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i X^i = (1+X)^{-1}.\end{aligned}$$

［例 7.3］ R を可換環とし, $\mathbb{Q}$ を部分体として含むとする．また, $\alpha \in R$ とする．このとき, $R[[X]]$ において, $(1+X)^{\alpha}$ の形式的微分は $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ である．実際,

$$\begin{aligned}\bigl((1+X)^{\alpha}\bigr)' &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\binom{\alpha}{i+1}X^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha-1}{i}X^i \\ &= \alpha(1+X)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

R を可換環とし, $\mathbb{Q}$ を部分体として含むとする．$R[[X]]$ の元 $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ に対して, $R[[X]]$ の元 $\displaystyle\int f(X)\,dX$ を

$$\begin{aligned}\int f(X)\,dX &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}X^i \\ &= a_0 X + \frac{a_1}{2}X^2 + \frac{a_2}{3}X^3 + \frac{a_3}{4}X^4 + \cdots\end{aligned}$$

によって定める．$\displaystyle\int f(X)\,dX$ を $f(X)$ の**形式的積分**という．定義から明らかに,

$$\frac{d}{dX}\int f(X)\,dX = f(X)$$

が成り立つ．

8　陰関数定理と逆関数定理

R を可換環とする．

$R[[X, Y]]$ の元 $f(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij}X^iY^j$ に対して, $R[[X, Y]]$ の元 $f_X(X, Y)$, $f_Y(X, Y)$ を

$$f_X(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (i+1)a_{i+1,j}X^iY^j,$$
$$f_Y(X, Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (j+1)a_{i,j+1}X^iY^j$$

によって定める. $f_X(X, Y)$, $f_Y(X, Y)$ をそれぞれ $f(X, Y)$ の X, Y に関する**形式的偏微分**という. $f_X(X, Y)$, $f_Y(X, Y)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial X}$, $\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ とも書く.

［定理 8.1（陰関数定理）］ $f(X, Y) \in R[[X, Y]]_0$ とし, $f_Y(X, Y) \in R[[X, Y]]^\times$ を満たすとする. このとき, ある $g(X) \in R[[X]]_0$ が一意的に存在して, $f(X, g(X)) = 0$ が成り立つ[4].

［証明］ $g(X) = b_1X + b_2X^2 + \cdots$ の係数を, $f(X, g(X)) = 0$ を満たすように決めていく.

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij}X^iY^j \\ &= f_0(X) + f_1(X)Y + f_2(X)Y^2 + \cdots \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f_Y(X, Y) \in R[[X, Y]]^\times &\iff a_{01} \in R^\times \\ &\iff f_1(X) \in R[[X]]^\times. \end{aligned}$$

そこで,

$$h_i(X) = -f_i(X)f_1(X)^{-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

とおく. $f(X, g(X)) = 0$ が成り立つとすると,

$$0 = f_0(X) + f_1(X)g(X) + f_2(X)g(X)^2 + f_3(X)g(X)^3 + \cdots$$

より,

$$g(X) = h_0(X) + h_2(X)g(X)^2 + h_3(X)g(X)^3 + \cdots .$$

$\operatorname{ord} g \geq 1$ だから, $g(X)$ の 1 次の項は $h_0(X)$ の 1 次の項に一致する. これより, b_1 がただ 1 つに決まる. さらに, $i \geq 2$ に対して, 再び $\operatorname{ord} g \geq 1$ より

$$g(X) - \left(h_0(X) + \sum_{k=2}^{i} h_k(X)g(X)^k \right) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \deg i + 1).$$

よって, $g(X)$ の X^i における係数は $h_0(X) + \sum_{k=2}^{i} h_k(X)g(X)^k$ の X^i における係数と一致する. すなわち,

$$b_i = (h_0(X),\, h_2(X),\, \ldots,\, h_i(X) \text{ の係数と } b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_{i-1} \text{ との多項式})$$

なる形に書ける. $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ がすでに決まっていれば, b_i を一意的に定めることができる. これより, $g(X)$ の存在と一意性がいえる. □

[4] 逆に, $f(X, g(X)) = 0$ なる $g(X) \in R[[X]]_0$ が存在するとき, 係数を比較すると, f の定数項は 0 になる.

[定理 8.2（逆関数定理）] $f(X) \in R[[X]]$ とする．このとき, 次の 2 つの条件は同値である．

(i) ある $g(X) \in R[[X]]_0$ が存在して, $f(g(X)) = X$.

(ii) $f(X) \in R[[X]]_0$ かつ $f'(X) \in R[[X]]^\times$.

さらに, もし条件 (i) が成り立てば, $g(X)$ は一意的であり, $g(f(X)) = X$ も成り立つ．

[証明] (i)⇒(ii)　$f(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$, $g(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$ とおく．$f(g(X)) = X$ の定数項と 1 次の項を比較すると, $a_0 = 0$, $a_1 b_1 = 1$ となる．よって, $f(X) \in R[[X]]_0$, $a_1 \in R^\times$．2 番目の条件は $f'(X) \in R[[X]]^\times$ と同値である．

(ii)⇒(i)　$F(X, Y) = X - f(Y)$ に対して定理 8.1 を適用すると, ある $g(X) \in R[[X]]_0$ が一意的に存在して,

$$X - f(g(X)) = F(X, g(X)) = 0.$$

すなわち, $f(g(X)) = X$．ここで, $g(X)$ の一意性は (ii) が前提になっていることに注意せよ．いまの場合, (i)⇒(ii) が成り立つことはすでに示されているから, (i) が成り立てば $g(X)$ は一意的である．

さらに, (i) における $g(X)$ は条件 (ii) を満たすから, 再び上の議論より, ある $h(X) \in R[[X]]_0$ が存在して $g(h(X)) = X$ となる．このとき, $f(g(X)) = X$ の X に $h(X)$ を代入すると,

$$f(X) = f(g(h(X))) = h(X).$$

したがって, $g(f(X)) = X$. □

[補題 8.3]　(i) $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$ が $\mathbb{Q}[[X, Y]]$ において成り立つ．

(ii) $(\exp(X))^{-1} = \exp(-X)$ が $\mathbb{Q}[[X]]$ において成り立つ．

[証明] (i)　$X + Y \in \mathbb{Q}[[X, Y]]_0$ なので, $\exp(X+Y)$ は $\exp(X) \in \mathbb{Q}[[X]]$ の X に $X+Y$ を代入したものとして $\mathbb{Q}[[X, Y]]$ において定まる．

$$\begin{aligned}\exp(X+Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(X+Y)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{s+t=k} \frac{k!}{s!t!} X^s Y^t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s+t=k} \frac{1}{s!t!} X^s Y^t\right).\end{aligned}$$

一方, $\mathbb{Q}[[X, Y]]$ において, 形式的冪級数の定義にしたがって計算すると,

$$\begin{aligned}\exp(X)\exp(Y) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Y^j\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{i!j!} X^i Y^j. \end{aligned} \tag{10}$$

各 k に対して, (10) の中に現れる k 次の項すべての和は $\sum_{s+t=k}(1/s!t!)X^sY^t$ であるから, すべての整数 $d \geq 0$ に対して

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{i!j!}X^iY^j \equiv \sum_{k=0}^{d}\left(\sum_{s+t=k}\frac{1}{s!t!}X^sY^t\right) \pmod{\deg d+1}.$$

定理 3.8 より,

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{i!j!}X^iY^j = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s+t=k}\frac{1}{s!t!}X^sY^t\right).$$

したがって, $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

(ii) Y に $-X$ を代入すると,

$$1 = \exp(0) = \exp(X-X) = \exp(X)\exp(-X).$$

ゆえに, $(\exp(X))^{-1} = \exp(-X)$. □

[定理 8.4] R を可換環とし, $\mathbb{Q}$ を部分体として含むとする. このとき, 任意の $\alpha \in R$ に対して,

$$\exp\bigl(\alpha\log(1+X)\bigr) = (1+X)^\alpha$$

が成り立つ. 特に, $\alpha = 1$ とすれば,

$$\exp\bigl(\log(1+X)\bigr) - 1 = X$$

が得られる.

[証明] $f(X) = (1+X)^\alpha \cdot \exp\bigl(-\alpha\log(1+X)\bigr)$ とおく. これの形式的微分を計算すると,

$$\begin{aligned} f'(X) &= \alpha(1+X)^{\alpha-1}\cdot\exp\bigl(-\alpha\log(1+X)\bigr) \\ &\qquad + (1+X)^\alpha\cdot\exp\bigl(-\alpha\log(1+X)\bigr)\cdot(-\alpha)(1+X)^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

R が $\mathbb{Q}$ を部分体として含むので, 0 でない整数はすべて R における単元であり, したがって零因子ではない. ゆえに, 任意の整数 $m > 0$ と R の任意の元 $a \neq 0$ に対して $ma \neq 0$ となる. このことから, $R[[X]]$ においては, $f'(X) = 0$ ならば $f(X)$ は定数である. $f(X)$ の定義式における定数項を見れば $f(X) = 1$ がわかる. ゆえに,

$$\exp\bigl(-\alpha\log(1+X)\bigr)^{-1} = (1+X)^\alpha.$$

左辺に補題 8.3 を用いれば, 求める等式が得られる. □

参考文献

[1] 藤崎源二郎: 体とガロア理論, 岩波書店, 1997.

[2] ブルバキ (倉田令二朗, 清水達雄訳): 数学原論 代数 4, 東京図書, 1969.

索 引