Bertrand-Chebyshev の定理の Erdös による初等的な証明

MATHEMATICS.PDF

2012-08-14

目 次

参考文献

[1] P. Erdös: Beweis eines Satzes von Tschebyschef (in German), Acta Litt. Sci. Szeged 5 (1932), 194–198.

[2] 一松信: n と $2n$ の間に素数がある —ベルトラン・チェビシェフの定理のエルデーシュによる初等的証明—, 数研通信 70 号 (2011), 2–5.

1　はじめに

この文書では, 以下の定理の初等的な証明を紹介する. その証明のアイデアは, P. Erdös によって発見されたものである.

[定理 1.1（Bertrand-Chebyshev の定理）] 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, ある素数 p が存在して,

$$n < p \leq 2n$$

を満たす.

[注意 1.2] $n \geq 2$ ならば, $2n$ は合成数なので, 上の不等式は $n < p < 2n$ となる.

定理 1.1 は, 次の形で述べることもできる.

[定理 1.3（Bertrand-Chebyshev の定理）] 任意の実数 $x \geq 1$ に対して, ある素数 p が存在して,

$$x < p \leq 2x$$

を満たす.

[証明] 定理 1.3 から 定理 1.1 が導かれるのは明らかなので, 定理 1.1 から定理 1.3 が導かれることのみ示す.

x を超えない最大の整数を n とする. $x \geq 1$ より, $n \geq 1$ である. n に対して最初の形を適用すると,

$$n < p \leq 2n \leq 2x.$$

$n < p$ は整数どうしの比較なので, $n + 1 \leq p$. 一方, n の最大性から, $x < n + 1$. ゆえに,

$$x < n + 1 \leq p$$

となる. □

[注意 1.4] $x > 1$ ならば, 上の不等式は $x < p < 2x$ となる. 実際, $x \geq 2$ の場合は, 注意 1.2 で述べたことを用いて, 上の証明と同様にして示せる. $1 < x < 2$ の場合は, $p = 2$ とすればよい.

以下, いくつかの補題を準備したのち, 定理 1.1 を証明する.

2　素数の個数の評価

実数 x に対し, $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とする. また, x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ で表す.

[補題 2.1] 任意の実数 x に対して, $\pi(x) \leq \dfrac{x}{3} + 2$.

[証明] まず, 任意の整数 $k \geq 3$ に対して, $\pi(k) \leq k/3 + 2$ となることを示す. $k \geq 25$ なる任意の整数 k に対して, 1 は素数でなく, 2, 3 の倍数は (2, 3 自身を除き) 合成数であり, $25 = 5^2$ もまた合成数であるから, それらを差し引けば,

$$\begin{aligned}\pi(k) &\leq k - 1 - \left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1\right) - \left(\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1\right) + \left\lfloor \frac{k}{2 \cdot 3} \right\rfloor - 1 \\ &\leq k - 1 - \left(\frac{k}{2} - 2\right) - \left(\frac{k}{3} - 2\right) + \frac{k}{6} - 1 = \frac{k}{3} + 2.\end{aligned}$$

$3 \leq k \leq 24$ なるすべての k に対して不等式が成り立つことは直接確かめられる. 実際, 整数 k に対して,

$$\begin{aligned}\pi(k) = 2 &\iff k = 3,\, 4, \\ \pi(k) = 3 &\iff k = 5,\, 6, \\ \pi(k) = 4 &\iff k = 7,\, 8,\, 9,\, 10, \\ \pi(k) = 5 &\iff k = 11,\, 12, \\ \pi(k) = 6 &\iff k = 13,\, 14,\, 15,\, 16, \\ \pi(k) = 7 &\iff k = 17,\, 18, \\ \pi(k) = 8 &\iff k = 19,\, 20,\, 21,\, 22, \\ \pi(k) = 9 &\iff k = 23,\, 24,\, 25,\, 26,\, 27,\, 28.\end{aligned}$$

さらに, 任意の実数 $x \geq 3$ に対して,

$$\pi(x) = \pi(\lfloor x \rfloor) \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{3} + 2 \leq \frac{x}{3} + 2.$$

$x < 2$ のとき $\pi(x) = 0$ であり, $2 < x < 3$ のとき $\pi(x) = 1$ であるから, これらの場合にも不等式は成り立つ. (証明終) $\square$

3 二項係数の評価

$n = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$c_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

とおく. すると, 各 n に対して,

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= c_n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= c_n \frac{2(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2} \\ &= c_n \frac{2(2n+1)}{n+1}\end{aligned}$$

が成り立つ.

[補題 3.1] 任意の整数 $n \geq 2$ に対して, $c_n < 2^{2n-1}$.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.
まず, $c_2 = 6 < 2^{2\cdot 2-1}$ より, $n = 2$ のときは正しい.
n のとき正しいとすると, 帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \frac{2(2n+1)}{n+1} \\ &< 2^{2n-1} \frac{2(2n+1)}{n+1} \\ &< 2^{2n-1} \cdot 2 \cdot 2 = 2^{2(n+1)-1} \end{aligned}$$

となり, $n+1$ のときも正しい. □

[補題 3.2] 任意の整数 $n \geq 4$ に対して, $\dfrac{2^{2n}}{n} < c_n$.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.
まず, $c_4 = 70 > 64 = 2^{2\cdot 4}/4$ より, $n = 4$ のときは正しい.
n のとき正しいとすると, 帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \frac{2(2n+1)}{n+1} \\ &> \frac{2^{2n}}{n} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \\ &> \frac{2^{2n}}{n} \cdot \frac{2 \cdot 2n}{n+1} = \frac{2^{2(n+1)}}{n+1} \end{aligned}$$

となり, $n+1$ のときも正しい. □

4 二項係数の素因子の評価

実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ で表す.

[補題 4.1] 任意の x, y に対して,

$$0 \leq \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$$

が成り立つ.

[証明] $\delta = x - \lfloor x \rfloor$, $\delta' = y - \lfloor y \rfloor$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lfloor x+y \rfloor &= \big\lfloor \lfloor x \rfloor + \delta + \lfloor y \rfloor + \delta' \big\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \delta + \delta' \rfloor. \end{aligned}$$

移項すると,

$$\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = \lfloor \delta + \delta' \rfloor.$$

一方, $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \delta' < 1$ であるから,

$$0 \leq \delta + \delta' < 2.$$

ゆえに,

$$0 \leq \lfloor \delta + \delta' \rfloor \leq 1.$$

これより, 求める不等式が得られる. $\square$

p を素数, x を有理数とする. $x \neq 0$ のとき, 整数における素因子分解の一意性により,

$$x = p^m \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(a, p) = \gcd(b, p) = 1$$

となるような整数 m が (p と x に対して) 一意的に定まる. この m を $\mathrm{ord}_p(x)$ で表す. また, $\mathrm{ord}_p(0) = \infty$ と定める. $\mathrm{ord}_p(x)$ を x の p 指数という.

[補題 4.2] p を素数, n を正の整数とする. このとき,

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

が成り立つ.

[証明] $a = \lfloor \log_p n \rfloor$ とおく. $i > a$ なる整数 i に対しては $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0$ であるから,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{a} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

特に, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ は有限和である.

$n!$ の因数 $1, 2, \ldots, n$ の中で, p の倍数は

$$p, \quad 2p, \quad 3p, \quad \ldots, \quad \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \cdot p$$

の $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ 個である. また, p^2 の倍数は

$$p^2, \quad 2p^2, \quad 3p^2, \quad \ldots, \quad \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \cdot p^2$$

の $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ 個である. 一般に, p^i の倍数は

$$p^i, \quad 2p^i, \quad 3p^i, \quad \ldots, \quad \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \cdot p^i$$

の $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ 個である.

すべての i $(1 \leq i \leq a)$ について $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ を加えると, $n!$ の因数で p 指数が i なるものについてはちょうど i 回重複して数えることになって, $\displaystyle\sum_{i=0}^{a} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ は $n!$ の素因数として現れる p の個数に一致する. これはまさに $n!$ の p 指数である. $\square$

【補題 4.3】 p を素数, n を正の整数, k を $0 \leq k \leq n$ なる整数とする. 二項係数 $\binom{n}{k}$ の p 指数について,

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p\left(\binom{n}{k}\right) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\right).\end{aligned}$$

ただし, $a+1 \leq i$ を満たす全ての整数 i に対して,

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor = 0.$$

さらに, 各 $i = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$0 \leq \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \leq 1$$

が成り立つ.

【証明】 $a = \lfloor \log_p n \rfloor$ とおくと, $a \leq \log_p n < a+1$ であるから,

$$p^a \leq n < p^{a+1}.$$

また, $0 \leq k \leq n$ かつ $0 \leq n-k \leq n$ であるから, $a+1 \leq i$ を満たす全ての整数 i に対して,

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor = 0.$$

このとき, 補題 4.2 を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p\left(\binom{n}{k}\right) &= \operatorname{ord}_p\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)\\ &= \operatorname{ord}_p(n!) - \operatorname{ord}_p(k!) - \operatorname{ord}_p((n-k)!)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\\ &= \sum_{i=1}^{a}\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{a}\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{a}\left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\\ &= \sum_{i=1}^{a}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\right).\end{aligned}$$

さらに, 各 $i = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$\frac{n}{p^i} = \frac{k}{p^i} + \frac{n-k}{p^i}$$

であるから, 補題 4.1 より,

$$0 \leq \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \leq 1.$$

□

[補題 4.4] p を素数, n を正の整数, k を $0 \leq k \leq n$ なる整数とする．二項係数 $\binom{n}{k}$ の p 指数 $e(p) = \mathrm{ord}_p\left(\binom{n}{k}\right)$ について, $p^{e(p)} \leq n$ が成り立つ.

[証明] $a = \lfloor \log_p n \rfloor$ とおくと, 補題 4.3 より,

$$e(p) = \sum_{i=1}^{a} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \right),$$

かつ

$$0 \leq \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

ゆえに,

$$e(p) \leq \sum_{i=1}^{a} 1 = a \leq \log_p n.$$

したがって, $p^{e(p)} \leq n$ となる. □

[補題 4.5] p を素数, n を正の整数, k を $0 \leq k \leq n$ なる整数とする．このとき, $\sqrt{n} < p$ ならば, 二項係数 $\binom{n}{k}$ の p 指数について,

$$0 \leq \mathrm{ord}_p\left(\binom{n}{k}\right) \leq 1$$

が成り立つ.

[証明] $\sqrt{n} < p$ であると仮定すると, $n/p^2 < 1$ であるから, $i \geq 2$ なる任意の整数 i に対して,

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor = 0.$$

これと補題 4.3 より,

$$\mathrm{ord}_p\left(\binom{n}{k}\right) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p} \right\rfloor,$$

かつ

$$0 \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p} \right\rfloor \leq 1.$$

ゆえに, 不等式は成り立つ. □

[補題 4.6] n を正の整数, p を素数とする．また, k を $0 \leq k \leq n$ なる整数とする．このとき, $n \geq 3$ かつ $\frac{2n}{3} < p \leq n$ ならば, p は二項係数 $\binom{2n}{n}$ を割らない奇素数である.

［証明］ $n \geq 3$ かつ $2n/3 < p$ より, $2 < p$. すなわち, p は奇素数である. さらに, $2n/3 < p \leq n$ より

$$p \leq n < \frac{4n}{3} < 2p \leq 2n < 3p$$

であるから, p は

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

の分子, 分母にちょうど 2 回ずつ現れて約分される. したがって, p は二項係数 $\binom{2n}{n}$ の素因子として現れることはない. $\square$

5　素数の積の評価

［補題 5.1］ 任意の整数 $n \geq 2$ に対して,

$$\prod_{n+1 \leq p \leq 2n} p < 2^{2(n-1)}$$

が成り立つ. ただし, 左辺は素数 p の積である.

［証明］ $2n$ は合成数であるから,

$$\prod_{n+1 \leq p \leq 2n} p = \prod_{n+1 \leq p \leq 2n-1} p.$$

また, 等式

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{(n-1)(n-2)\cdots 1}$$

の右辺において, $n+1$ 以上 $2n-1$ 以下の素数は分子に 1 回ずつ現れるだけで約分されない. よって,

$$\prod_{n+1 \leq p \leq 2n-1} p \leq \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

さらに, 補題 3.1 より, $n \geq 2$ ならば $\binom{2n}{n} < 2^{2n-1}$ であるから,

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n} < \frac{2^{2n-1}}{2} = 2^{2(n-1)}.$$

したがって, 求める不等式が得られる. $\square$

［補題 5.2］ 任意の整数 $n \geq 2$ に対して,

$$\prod_{p \leq n} p < 2^{2n-1}$$

が成り立つ. ただし, 左辺は素数 p の積である.

[証明] n に関する数学的帰納法により証明する.

まず, $\prod_{p \le 2} p = 2 < 2^{2\cdot 2-1}$ であるから, $n=2$ のときは正しい.

n より小さいときは正しいと仮定して, n のときを示す.

n が偶数の場合. n は合成数であるから, $\prod_{p \le n} p = \prod_{p \le n-1} p$ となり, n のときも正しい.

n が奇数の場合. $n = 2m-1$ $(m \ge 2)$ とおくと, 帰納法の仮定から,

$$\prod_{p \le m} p < 2^{2m-1}.$$

他方, 補題 5.1 より,

$$\prod_{m+1 \le p \le 2m} p < 2^{2(m-1)}.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \prod_{p \le n} p = \prod_{p \le 2m-1} p &= \prod_{p \le 2m} p \\ &= \prod_{p \le m} p \prod_{m+1 \le p \le 2m} p \\ &< 2^{2m-1} \cdot 2^{2(m-1)} \\ &= 2^{2(2m-1)-1} = 2^{2n-1}. \end{aligned}$$

したがって, n のときも正しい. □

6　微分法に関する補題

[補題 6.1] n を正の整数とする. このとき, $x > e^n$ において, 関数 $\dfrac{\log x}{\sqrt[n]{x}}$ は減少する.

[証明] $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt[n]{x}}$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{n - \log x}{nx\sqrt[n]{x}}.$$

$x > e^n$ のとき, $nx\sqrt[n]{x} > 0$ であり,

$$n - \log x < n - \log e^n = 0$$

であるから, $f'(x) < 0$. ゆえに, $f(x)$ は減少する. □

[注意 6.2] 関数 $\dfrac{\log x}{\sqrt[n]{x}}$ は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する. 実際, $\alpha = 1/n$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{e^{\alpha \log x}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha \log x}{e^{\alpha \log x}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0. \end{aligned}$$

7 定理 1.1 の証明

$n = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$c_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

とおく. $c_n \mid (2n)!$ であるから, c_n の素因子はすべて $2n$ 以下である.

いま, n と $2n$ の間に素数がないと仮定し, $n \geq 5$ であるとする. そのとき, c_n の素因子はすべて n 以下である. ところが, 補題 4.6 より, $n \geq 3$ かつ素数 p が $2n/3 < p \leq n$ を満たすならば p は c_n の素因子ではないので, c_n の素因子はすべて $2n/3$ 以下である. 素数 p に対し, c_n の p 指数を $e(p)$ とおく. すると,

$$c_n = \prod_{p \leq 2n/3} p^{e(p)}.$$

補題 4.5 より, $\sqrt{2n} < p$ ならば $e(p) \leq 1$. また, 補題 4.4 より, すべての素数 p に対して $p^{e(p)} \leq 2n$. よって,

$$\begin{aligned}\prod_{p \leq 2n/3} p^{e(p)} &= \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{e(p)} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \\ &\leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \prod_{p \leq 2n/3} p.\end{aligned}$$

ここで, $n \geq 5$ ならば $\sqrt{2n} < 2n/3$ である. 補題 2.1 より $\sqrt{2n}$ 以下の素数の個数は $\sqrt{2n}/3 + 2$ 以下であるから,

$$\prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \leq (2n)^{\sqrt{2n}/3+2}.$$

また, 補題 5.2 を用いて素数の積を上から評価すると,

$$\prod_{p \leq 2n/3} p = \prod_{p \leq \lfloor 2n/3 \rfloor} p < 2^{2 \cdot \lfloor 2n/3 \rfloor - 1} \leq 2^{2 \cdot 2n/3 - 1}.$$

したがって,

$$c_n < (2n)^{\sqrt{2n}/3+2} \cdot 2^{2 \cdot 2n/3 - 1}.$$

さらに, 補題 3.2 より $2^{2n}/n < c_n$ であるから,

$$\frac{2^{2n}}{n} < (2n)^{\sqrt{2n}/3+2} \cdot 2^{2 \cdot 2n/3 - 1}.$$

これを整理すると,

$$2^{(2n - \sqrt{2n} - 3)/3} < n^{(\sqrt{2n}+9)/3}.$$

対数をとると,

$$(2n - \sqrt{2n} - 3) \log 2 < (\sqrt{2n} + 9) \log n.$$

移項すれば,

$$(\sqrt{2n} + 9) \log n + (\sqrt{2n} + 3 - 2n) \log 2 > 0.$$

さて, 上式の左辺において n を x に置き換えたものを $g(x)$ とおく. すなわち,

$$g(x) = (\sqrt{2x} + 9) \log x + (\sqrt{2x} + 3 - 2x) \log 2.$$

すると, ここまでの議論の結果は, n と $2n$ の間に素数がないという仮定のもとで,

$$n \geq 5 \Longrightarrow g(n) > 0$$

と書き表せる. さらに, $f(x) = g(x)/x$ とおくと,

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}\log x}{\sqrt{x}} + \frac{9\log x}{x} + \frac{\sqrt{2}\log 2}{\sqrt{x}} + \frac{3\log 2}{x} - 2\log 2.$$

補題 6.1 より, 関数 $f(x)$ は $x > e^2$ において減少する. 数値計算により $f(e^5) < 0$ がわかるから, $x \geq e^5$ において $g(x)/x = f(x) < 0$. よって, $g(x) < 0$.

$n \geq e^5$ のとき. もし仮に n と $2n$ の間に素数がなければ, $g(n) > 0$. これは矛盾である. したがって, $n \geq e^5$ のとき, 定理 1.1 は成立しなければならない.

$n < e^5$ のとき. $n < p < 2n$ なる素数 p の存在は, 素数表を用いて確認すればよい.

8 簡単な応用例

Bertrand-Chebyshev の定理から, 以下の定理が直ちに証明される.

[定理 8.1] m, n を整数とし, $m \geq 2$, $n \geq 2$ を満たすとする. このとき, n の階乗は m 乗数でない.

[証明] 背理法により証明する. n の階乗が m 乗数であると仮定する. そのとき, ある整数 s が存在して, $n! = s^m$ となる. 一方, $n/2\ (\geq 1)$ に対して定理 1.3 を適用すると, ある素数 p が存在して, $n/2 < p \leq n$ を満たす. p は $n!$ の素因子であり,

$$\begin{aligned} p \mid n! \Longrightarrow p \mid s^m \Longrightarrow p \mid s \Longrightarrow p^m \mid s^m \\ \Longrightarrow p^{m-1} \,\Big|\, \frac{s^m}{p} \Longrightarrow p^{m-1} \,\Big|\, \frac{n!}{p}. \end{aligned}$$

$m \geq 2$ であることから, 2 から n までの整数の中に p の倍数になるものが p 自身のほかにも存在しなければならない. それを a とおくと, ある整数 $k \geq 2$ が存在して, $a = kp$. ゆえに,

$$2p \leq kp = a \leq n.$$

これは $n/2 < p$ であることに反する. したがって, n の階乗は m 乗数でない. □