1　有限 Abel 群の指標

有限 Abel 群 G から複素数の乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への準同型写像を G の**指標**という．

G の指標全体からなる集合を $\widehat{G}$ で表すことにする．$\widehat{G}$ の 2 つの元 χ, χ' に対して，次のようにして積を定義する：

$$(\chi\chi')(x) = \chi(x)\chi'(x) \qquad (x \in G)$$

この積について $\widehat{G}$ は群をなす．単位元は，G のすべての元 x を 1 へと写す写像である．これをまた 1 と表すことにする．$\widehat{G}$ の元 χ の逆元は，G の元 x に対して χ による x の像の複素共役に対応させる写像である．実際，これは準同型写像である．$\widehat{G}$ を一般に**指標群**と呼ぶ．

G を位数 n の Abel 群，χ を G の指標とする．G の任意の元 x に対して，$\chi(x)$ は 1 の n 乗根になる．実際

$$\chi(x)^n = \chi(x^n) = \chi(1) = 1$$

である．とくに $|\chi(x)| = 1$ が成り立つ．

例 1.1.　m を正の整数とする．環 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の単元全体のなす乗法群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の指標を，m **を法とする指標**という．

命題 1.2.　H を G の部分群とし，χ を H の指標とする．このとき G の指標 $\widetilde{\chi}$ が存在して

$$\widetilde{\chi}(h) = \chi(h) \qquad (\forall h \in H)$$

が成り立つ．すなわち χ の拡張が存在する．

証明.　H の G に関する指標 $(G:H)$ についての数学的帰納法によって証明する．$(G:H) = 1$ ならば $G = H$ だから証明すべきことはない．

$(G:H) > 1$ とし，$(G:H)$ より小さい指数については命題の主張が正しいと仮定する．x を H には含まれない G の元とし，$x^n \in H$ を満たす正の整数 n の中で最小のものを n_0 とする．

χ を H の指標とし，$t = \chi(x^{n_0})$ とおく．$\mathbb{C}$ は代数的閉体だから $t = w^{n_0}$ を満たす $\mathbb{C}^\times$ の元 w が存在する．H' を H と x とによって生成される G の部分群とする．H' の任意の元 h' は

$$h' = hx^a \qquad (h \in H,\ 0 \leq a < n_0)$$

と一意的に表される (注意 1.3)．このとき H' の指標 χ' を

$$\chi'(h') = \chi(h)w^a$$

によって定義する．χ' は H' の指標である (注意 1.4)．h' が H の元のとき $a = 0$ であるから

$$\chi'(h) = \chi(h) \qquad (\forall h \in H)$$

が成り立つ．$(G:H') < (G:H)$ だから帰納法の仮定により G の指標 $\widetilde{\chi}$ が存在して

$$\widetilde{\chi}(h') = \chi'(h') \qquad (\forall h' \in H')$$

ゆえに

$$\widetilde{\chi}(h) = \chi(h) \qquad (\forall h \in H)$$

となる．　□

注意 1.3. 実際

$$h' = hx^a = h_1 x^{a_1} \qquad (h,\, h_1 \in H,\, 0 \le a < n_0,\, 0 \le a_1 < n_0)$$

と二通りに表されていたとすると

$$x^{a-a_1} = h^{-1}h_1 \in H$$

n_0 の最小性から

$$a \equiv a_1 \pmod{n_0}$$

でなければばならない．したがって $a = a_1$．これより $h = h_1$ も導かれる．

注意 1.4. 実際，H' の元

$$\begin{aligned} h_1' &= h_1 x^{a_1} \qquad (h_1 \in H,\, 0 \le a_1 < n_0) \\ h_2' &= h_2 x^{a_2} \qquad (h_2 \in H,\, 0 \le a_2 < n_0) \end{aligned}$$

に対して，$a_1 + a_2 < n_0$ のとき

$$h_1' h_2' = h_1 h_2 x^{a_1+a_2}, \qquad 0 \le a_1 + a_2 < n_0$$

であるから

$$\chi(h_1'h_2') = \chi(h_1h_2)w^{a_1+a_2} = \chi(h_1)w^{a_1}\chi(h_2)w^{a_2} = \chi(h_1')\chi(h_2')$$

である．一方，$n_0 \le a_1 + a_2$ のとき

$$h_1'h_2' = h_1h_2x^{a_1+a_2} = h_1h_2x^{n_0}x^{a_1+a_2-n_0}, \qquad 0 \le a_1 + a_2 - n_0 < n_0$$

であるから

$$\begin{aligned} \chi(h_1'h_2') &= \chi(h_1h_2x^{n_0})w^{a_1+a_2-n_0} \\ &= \chi(h_1)\chi(h_2)w^{a_1+a_2} \cdot t \cdot w^{-n_0} \\ &= \chi(h_1)w^{a_1}\chi(h_2)w^{a_2} \\ &= \chi(h_1')\chi(h_2') \end{aligned}$$

命題 1.5. G を有限 Abel 群，H を G の部分群とし

$$H_1 = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(h) = 1\ (\forall h \in H)\}$$

とおく．このとき H_1 は $\widehat{G}$ の部分群であって

(i) $\widehat{G}/H_1 \cong \widehat{H}$

(ii) $\widehat{G/H} \cong H_1$

が成り立つ．

証明.

(i) G の指標を H へ制限することで定まる準同型写像

$$\rho : \widehat{G} \longrightarrow \widehat{H}, \qquad \chi \longmapsto \chi|_H$$

を考える．命題 1.2 より ρ は全射である．また，$\mathrm{Ker}\,\rho = H_1$ なので，準同型定理により

$$\widehat{G}/H_1 \cong \widehat{H}$$

が得られる．とくに H_1 は $\widehat{G}$ の部分群である．

(ii) H_1 の元 χ に対して

$$\chi'(xH) = \chi(x) \qquad (x \in G)$$

によって G/H から $\mathbb{C}^\times$ への指標 χ' を定義する．χ' は代表元 x 元の取り方によらず定まる．このとき準同型写像

$$H_1 \longrightarrow \widehat{G/H}, \qquad \chi \longmapsto \chi'$$

が定まる．

$$\chi'(xH) = 1\ (\forall x \in G) \Longrightarrow \chi(x) = 1\ (\forall x \in G) \Longrightarrow x = 1$$

より上の準同型写像は単射である．また G/H の指標 ψ に対して

$$\chi(x) = \psi(xH) \qquad (x \in G)$$

によって G の指標 χ を定義すれば，$\chi' = \psi$ となって上の準同型写像の全射性もいえる．

□

命題 1.6. 二つの有限 Abel 群 G_1, G_2 について

$$\widehat{G_1 \times G_2} \cong \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$$

が成り立つ．

証明. $G_1 \times G_2$ の指標を χ とし

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= \chi(x, 1) \qquad (x \in G) \\ \chi_2(x) &= \chi(1, y) \qquad (y \in G') \end{aligned}$$

によって G の指標 χ_1 と G' の指標 χ_2 を定める．写像

$$\rho : \widehat{G_1 \times G_2} \longrightarrow \widehat{G_1} \times \widehat{G_1}, \qquad \chi \longmapsto (\chi_1, \chi_2)$$

を考える．準同型性はすぐにわかる．

$$\begin{aligned} (\chi_1, \chi_2) = 1 &\Longrightarrow \chi_1 = 1,\ \chi_2 = 1 \\ &\Longrightarrow \chi(x, 1) = \chi(1, y) = 1\ (\forall x \in G_1,\ \forall y \in G_2) \\ &\Longrightarrow \chi(x, y) = \chi(x, 1)\chi(1, y) = 1\ (\forall (x,\ y) \in G_1 \times G_2) \end{aligned}$$

より単射性がいえる．さらに G_1 の指標 χ_1 と G_2 の指標 χ_2 に対して

$$\chi(x, y) = \chi(x)\chi'(y) \qquad (x \in G_1,\ y \in G_2)$$

によって $G_1 \times G_2$ の指標 χ を定めることができる．したがって ρ は全射である． □

系 1.7. l 個の有限 Abel 群 $G_1, \ldots, G_l$ について

$$G_1 \widehat{\times \cdots \times} G_l \cong \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_l}$$

が成り立つ．

証明. l についての数学的帰納法によって証明する．命題 1.6 がまさに $l=2$ の場合である．
$l \geq 3$ について，$l-1$ のとき主張が正しいと仮定すると

$$G_1 \widehat{\times \cdots \times} G_l \cong G_1 \widehat{\times \cdots \times} G_{l-1} \times \widehat{G_l} \cong \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_{l-1}} \times \widehat{G_l}$$

となり，l のときも正しい． $\square$

命題 1.8. G を位数 n の巡回群とする．このとき

$$G \cong \widehat{G}$$

が成り立つ．

証明. G の生成元を g とする．G は加法群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型である．χ を G の指標とすると

$$\chi(g^k) = \chi(g)^k \qquad (\forall g \in G, \forall k \in \mathbb{Z})$$

だから，χ は値 $\chi(g)$ によって定まる．
$\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ とおく．ζ は 1 の原始 n 乗根である．いま，整数 a に対して，G の指標 χ_a を $\chi_a(g) = \zeta^a$ によって定め，写像

$$\rho : \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{G}, \qquad a \longmapsto \chi_a$$

を考える．

$$\chi_{a+b} = \chi_a\chi_b \iff \chi_{a+b}(g) = \chi_a(g)\chi_b(g) \iff \zeta^{a+b} = \zeta^a\zeta^b$$

であるから，ρ は準同型写像である．
また，$\chi(g)$ は 1 の n 乗根だから

$$\chi(g) = \zeta^a \qquad (\exists a \in \mathbb{Z})$$

すなわち，G の任意の指標 χ は，ある $a \in \mathbb{Z}$ によって $\chi = \chi_a$ となる．したがって ρ は全射である．さらに

$$\chi_a = 1 \iff \chi_a(g) = \zeta^a = 1 \iff a \equiv 0 \pmod{n}$$

だから，$\ker\rho = n\mathbb{Z}$．したがって準同型定理より同型

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \widehat{G}$$

を得る． $\square$

例 1.9. p を素数とする．このとき乗法群 $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は巡回群なので，指標群 $\widehat{G}$ もまた巡回群である．巡回群の性質より，$\widehat{G}$ の位数 2 の部分群はただ一つしかない．したがって $\widehat{G}$ の位数 2 の元はただ一つである．これを **Legendre 指標**という．

定理 1.10.　G を有限 Abel 群とする．このとき

$$G \cong \widehat{G}$$

が成り立つ．

証明．　有限 Abel 群の基本定理により，G は巡回群 $G_1, \ldots, G_l$ に分解することができる：

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_l$$

一方，各巡回群について，$G_i \cong \widehat{G_i}$ だった (命題 1.8) ので

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_l \cong \widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_l}$$

さらに命題 1.7 より

$$\widehat{G_1} \times \cdots \times \widehat{G_l} \cong G_1 \widehat{\times \cdots \times} G_l$$

以上より主張が証明される． □

系 1.11.　G を有限 Abel 群とする．このとき

$$|\widehat{G}| = |G|$$

が成り立つ．

証明．　定理 1.10 を認めれば明らかである．しかしながら有限 Abel 群の基本定理を経由しなくても上の主張は証明できる．

G の位数についての数学的帰納法で証明する．$n = 1$ のときは明らかである．$n \geq 2$ とし，H を G の巡回部分群であって，その位数が 1 より大きいものとする．命題 1.5 より

$$|\widehat{G}| = |\widehat{H}| \cdot |\widehat{G/H}|$$

ここで H は巡回群だから，命題 1.8 より

$$|H| = |\widehat{H}|$$

また $|G/H| < |G|$ だから帰納法の仮定によって

$$|G/H| = |\widehat{G/H}|$$

以上より $|G| = |H|$ を得る． □

定理 1.12.　G を有限 Abel 群とする．このとき自然な同型

$$G \cong \widehat{\widehat{G}}$$

が成り立つ．

証明．　G の元 x に対して，写像

$$\rho_x : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}, \qquad \chi \longrightarrow \chi(x)$$

を考える．ρ は $\widehat{G}$ の指標である．そこで写像

$$\rho : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}, \qquad x \longmapsto \rho_x$$

を考える．G の元 x, y と $\widehat{G}$ の元 χ に対して

$$\rho_{xy}(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = \rho_x(\chi)\rho_y(\chi)$$

であるから $\rho_{xy} = \rho_x\rho_y$．よって ρ は準同型写像である．

G が単位群であるとき ρ は明らかに全単射である．以下，G は単位群ではないと仮定する．系 1.11 より $|G| = |\widehat{G}| = |\widehat{\widehat{G}}|$ である．よってあとは ρ の単射性をいえばよい．

x を G の 1 とは異なる元とする．H を x によって生成される G の巡回部分群とする．H の指標 χ で $\chi(x) \neq 1$ なるものが存在する．実際，命題 1.8 より $H \cong \widehat{H}$ であり，一方，H の位数は 1 より大きいからである．命題 1.2 より χ は G の指標に拡張できる．よって ρ は単射である． □

注意 1.13. 定理 1.10 によって $G \cong \widehat{G}$ であるから,「自然な」という言葉を除けば命題 1.12 は明らかである．すなわち，G の生成元の取り方によらないで定まる同型写像が存在することが重要である．例えば，命題 1.8 において構成される同型写像は巡回群 G の生成元 g に依存して定まるものであった．

命題 1.14. G を位数 n の有限 Abel 群とし，χ を G の指標とする．このとき

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} n, & \chi = 1 \\ 0, & \chi \neq 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

証明. $\chi = 1$ のとき，G の任意の元 x に対して $\chi(x) = 1$ であるから

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = n$$

は明らかである．

$\chi = 1$ のとき，G の元 y で $\chi(y) \neq 1$ となるものが存在する．このとき

$$\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \sum_{z \in yG} \chi(z) = \sum_{z \in G} \chi(z)$$

ゆえに

$$(\chi(y) - 1) \sum_{x \in G} \chi(x) = 0$$

$\chi(y) \neq 1$ だから，両辺 $\chi(y) - 1$ で割ると

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$$

を得る． □

系 1.15. G を位数 n の有限 Abel 群とし，x を G の元とする．このとき

$$\sum_{x \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} n, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

証明. $G \cong \widehat{\widehat{G}}$ に注意して，命題 1.14 において G の代わりに $\widehat{G}$ を考えればよい． □