1　Cardanoによる三次方程式の解法

　複素数係数の三次方程式

(1) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

を考える．

$$y = x + \frac{a}{3}$$

とおいて，y に関する方程式に変換すれば，2 次の項が消えて，(1) は

(2) $$y^3 + 3py + q = 0$$

となる．ここで

$$p = -\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3}, \qquad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

である．いま，2 つの未知数 u, v を導入して

$$y = u + v$$

とおいて (2) に代入すれば

$$(u^3 + v^3 + q) + 3(u + v)(uv + p) = 0$$

となる．したがって u, v に関する連立方程式

(3) $$u^3 + v^3 + q = 0, \qquad uv + p = 0$$

の解 (u, v) が求められれば，$y = u+v$ は方程式 (2) の解になる．さらに 1 の 3 乗根 $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ をとれば

$$(u\omega, v\omega^2), \qquad (u\omega^2, v\omega)$$

もまた連立方程式 (3) の解となる．さらに

$$(y - (u + v))(y - (u\omega + v\omega^2))(y - (u\omega^2 + v\omega)) = y^3 + 3py + q$$

となるから

(4) $$y_1 = u + v, \qquad y_2 = u\omega + v\omega^2, \qquad y_3 = u\omega^2 + v\omega$$

が方程式 (2) の解のすべてである．

　さて，連立方程式 (3) の解 (u, v) に対して，$\alpha = u^3, \beta = v^3$ とおく．この α, β は，t に関する二次方程式

(5) $$t^2 + qt - p^3 = 0$$

の 2 つの解である．よって上の二次方程式の判別式を $D = q^2 + 4p^3$ とおけば，$u^3 = (-q \pm \sqrt{D})/2$ となる．したがって，$X^3 = (-q\pm\sqrt{D})/2$ の解の 1 つを u_0 とするとき，$u_0 \neq 0$ ならば，$v_0 = -p/u_0$ に対して

$$x_1 = u_0 + v_0 - \frac{a}{3}, \qquad x_1 = u_0\omega + v_0\omega^2 - \frac{a}{3} \qquad x_1 = u_0\omega^2 + v_0\omega - \frac{a}{3}$$

は三次方程式 (1) の解のすべてである．

$u_0 = 0$ となるのは，$p = 0$ のときに限る．この場合には方程式 $y^3 = -q$ の解の 1 つを y_0 とすれば

$$x_1 = y_0 - \frac{a}{3}, \qquad x_1 = y_0\omega - \frac{a}{3}, \qquad x_1 = y_0\omega^2 - \frac{a}{3}$$

は三次方程式 (1) の解のすべてである．

関係式 (4) は **Cardano の公式**と呼ばれる．また，二次方程式 (5) を三次方程式 (2) の**分解方程式**という．

例 1.1. 三次方程式 $x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0$ の解.

$a = 6$ だから $y = x + 2$ とおけば，元の方程式は

$$y^3 - 9y + 12 = 0$$

となる．$p = -3,\ q = 12$ であるから

$$u^3 + v^3 = -12, \qquad uv = 3$$

となる．分解方程式

$$t^2 + 12t + 27 = 0$$

の解は $t = -3,\ -9$ であるから，$u,\ v$ として例えば

$$u = -\sqrt[3]{3}, \qquad v = -\sqrt[3]{9}$$

を得る．よって 1 の 3 乗根を $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ とすれば

$$y = u + v, \qquad u\omega + v\omega^2, \qquad u\omega^2 + v\omega$$

が $y^3 - 9y + 12 = 0$ の解のすべてである．したがって求める 3 つの解は

$$x = u + v - 2, \qquad u\omega + v\omega^2 - 2, \qquad u\omega^2 + v\omega - 2$$

ただし $u = -\sqrt[3]{3},\ v = -\sqrt[3]{9}$ である．

例 1.2. 三次方程式 $x^3 - 6x^2 + 15x - 13 = 0$ の解.

$a = -6$ だから，$y = x - 2$ とおけば，元の方程式は

$$y^3 + 3y + 1 = 0$$

となる．$p = 1,\ q = 1$ であるから

$$u^3 + v^3 = -1, \qquad uv = -1$$

となる．分解方程式

$$t^2 + t - 1 = 0$$

の解は $t = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ だから，$u,\ v$ として例えば

$$u = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$$

を得る．よって，1 の 3 乗根を $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ とすれば

$$y = u+v, \qquad u\omega + v\omega^2, \qquad u\omega^2 + v\omega$$

が $y^3+3y+1=0$ の解のすべてである．したがって求める 3 つの解は

$$x = u+v-2, \qquad u\omega + v\omega^2 - 2, \qquad u\omega^2 + v\omega - 2$$

ただし

$$u = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

2　Ferrari による四次方程式の解法

複素数係数の四次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{6}$$

を考える．

$$y = x + \frac{a}{4}$$

とおいて，y に関する方程式に変換すれば，3 次の項が消えて (6) は

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{7}$$

となる．ここで

$$p = -\frac{3a^2}{8} + b, \qquad q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \qquad r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d$$

である．いま，未知数 w を導入して

$$y^4 = -py^2 - qy - r$$

の両辺に $2y^2w + w^2$ を加えると

$$(y^2+w)^2 = (2w-p)y^2 - qy + (w^2 - r) \tag{8}$$

と変形できる．この右辺が y に関して平方になるためには

$$q^2 - 4(2w-p)(w^2-r) = 0$$

となることが必要十分である．すなわち

$$8w^3 - 4pw^2 - 8rw + (4pr - q^2) = 0 \tag{9}$$

この三次方程式は解くことができる．解の 1 つを w とし，(8) に代入すれば

$$(y^2+w)^2 = (2w-p)\left(y - \frac{q}{2(2w-p)}\right)^2$$

のように右辺を y に関して平方にできる．よって

$$y^2 + w = \pm\sqrt{2w-p}\left(y - \frac{q}{2(2w-p)}\right)$$

これらの二次方程式を解くことにより，方程式 (7) の 4 つの根 y_1, y_2, y_3, y_4 がすべて求まる．したがって $x_i = y_i - a/4$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とおくことにより方程式 (6) の解もすべて求まる．

(9) は方程式 (7) の**分解方程式**と呼ばれる．

例 2.1.　四次方程式 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 10x + 3 = 0$ の解.
　$a = -4$ だから，$y = x - 1$ とおけば元の方程式は

$$y^4 + y^2 - 4y - 3 = 0$$

$p = 1,\ q = -4,\ r = -3$ であるから，分解方程式は

$$2w^3 - w^2 + 6w - 7 = 0$$

$w = 1$ は分解方程式の解である．したがって元の方程式は

$$(y^2 + 1)^2 = (y + 2)^2$$

と変形される．よって 2 つの二次方程式

$$y^2 + 1 = \pm(y + 2)$$

を解くことに帰着される．それぞれの方程式から

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

これより，求める解は

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$