1　微分

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ の開集合 D で全微分可能な関数とすると，任意の $a \in D$ に対して，

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h) \quad (h \to 0)$$

となります．ただし，$o(\rho)$ は Landau の記号で，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ です．このとき

$$df = f'(x)h \tag{1}$$

を f の**微分**といいます.

$f(x)$ が定数関数ならば，$df = 0$ になります.

x を独立変数とするとき，$f(x) = x$ とすれば，

$$f' = 1$$

となるので $f = x$ の微分は

$$dx = 1 \cdot h = h$$

となります．これを式 (1) に代入すると f の微分は

$$df = f'(x)dx \tag{2}$$

と表されます.

x が従属変数の場合にも，微分 df を式 (2) の形で表すことができます．そのことを主張するのが次の定理です.

定理 1.1.　$f(x)$ が x の関数として微分可能で，$x = x(t)$ が t について微分可能な関数であるとき，微分 df は

$$df = f'(t)dt = f'(x)dx$$

となる.

証明.　x は t の関数として微分可能であるから，

$$dx = x'(t)dt.$$

さらに，合成関数 $f = f(x(t))$ は t の関数として微分可能であるから，

$$df = f'(t)dt$$

となる.

$$f'(t) = f'(x)x'(t)$$

であるから，

$$df = f'(x)x'(t)dt = f'(x)dx$$

となる.　□

定理 1.2.　D で微分可能な実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，

(i)　$d(f+g) = df + dg$

(ii) $d(f-g) = df - dg$

(iii) $d(fg) = gdf + fdg$

(iv) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

が成り立つ.

証明.

(i)
$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)'dx \\ &= (f'(x)+g'(x))dx \\ &= f'(x)dx + g'(x)dx \\ &= df + dg. \end{aligned}$$

(ii) (i) と同様.

(iii)
$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)'dx \\ &= (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx \\ &= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx \\ &= gdf + fdg. \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{f}{g}\right)' dx \\ &= \left(\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\right) dx \\ &= \frac{g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx}{g(x)^2} \\ &= \frac{gdf + fdg}{g^2}. \end{aligned}$$

□

D において導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，微分 df の微分 $d^2f = d(df)$ を考えることができます．実際,

$$\begin{aligned} d^2f &= d(f'(x)dx) \\ &= d(f'(x))dx + f'(x)d^2x \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \end{aligned}$$

となります.

x が独立変数である場合，先に見たように $dx = h$ となります．h は独立変数なので，$d^2x = 0$ となります．したがって

$$d^2f = f''(x)dx^2$$

となります．また一般に，x が独立変数ならば，f が n 回微分可能であるとき

$$d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$$

が成り立ちます.

定理 1.3. $f(x, y)$ が x, y の関数として全微分可能で，$x = x(t),\ y = y(t)$ が t について微分可能な関数であるとき，微分 df は

$$df = f_x dx + f_y dy$$

となる．

証明. x は t の関数として微分可能であるから，

$$dx = x'(t)dt.$$

同様に，y は t の関数として微分可能であるから，

$$dy = y'(t)dt.$$

さらに，合成関数 $f = f(x(t), y(t))$ は t の関数として微分可能であるから，

$$df = f'(t)dt$$

となる．

$$f'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t)$$

であるから，

$$\begin{aligned} df &= (f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t))dt \\ &= f_x(x, y)x'(t)dt + f_y(x, y)y'(t)dt \\ &= f_x dx + f_y dy \end{aligned}$$

となる． □

記号を上の定理の通りとし，さらに $f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ が全微分可能であって，$x'(t),\ y'(t)$ が t について微分可能であるとき，

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d(f_x dx + f_y dy) \\ &= d(f_x)dx + f_x d(dx) + d(f_y)dy + f_y d(dy) \\ &= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + f_x d^2x + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy + f_y d^2y \\ &= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2x + f_y d^2y \end{aligned}$$

となります．両辺を dt^2 で割ると，$\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ の公式が得られます．

2 全微分

$f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で全微分可能な関数とすると，任意の $(a, b) \in D$ に対して，

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

となります．ただし，$\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ です．また，$o(\rho)$ は Landau の記号で，$\lim_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$ です．このとき，

$$df = f_x h + f_y k \tag{3}$$

を f の**全微分**といいます．

$f(x,\,y)$ が定数関数ならば，$df=0$ になります．

いま，$x,\,y$ は独立変数であるとします．$f(x,\,y)=x$ のとき，

$$f_x=1,\quad f_y=0$$

となるので，$f=x$ の全微分は

$$dx=1\cdot h+0\cdot k=h$$

となります．同様にして，$f=y$ の全微分は $dy=k$ となります．

これら $dx=h,\,dy=k$ を式 (3) に代入すると，f の全微分は

$$df=f_x dx+f_y dy \tag{4}$$

と表されます．

$x,\,y$ が従属変数である場合にも，全微分 df を式 (4) の形で表すことができます．そのことを主張するのが次の定理です．

定理 2.1. $f(x,\,y)$ が $x,\,y$ の関数として全微分可能で，$x=x(u,\,v),\,y=y(u,\,v)$ が $u,\,v$ の全微分可能な関数であるとき，

$$df=f_u du+f_v dv=f_x dx+f_y dy$$

が成り立つ．

証明. x は $u,\,v$ の関数として全微分可能であるから，

$$dx=x_u du+x_v dv.$$

同様に，y は $u,\,v$ の関数として全微分可能であるから，

$$dy=y_u du+y_v dv.$$

さらに，合成関数 $f=f(x(u,\,v),\,y(u,\,v))$ は $u,\,v$ の関数として全微分可能であるから，

$$df=f_u du+f_v dv$$

となる．

$$f_u=f_x x_u+f_y y_u,\quad f_v=f_x x_v+f_y y_v$$

であるから，

$$\begin{aligned} df &= (f_x x_u+f_y y_u)du+(f_x x_v+f_y y_v)dv \\ &= f_x(x_u du+x_v dv)+f_y(y_u du+y_v dv) \\ &= f_x dx+f_y dy \end{aligned}$$

となる． □

定理 2.2. D で全微分可能な実数値関数 $f(x,\,y),\,g(x,\,y)$ に対して，

(i) $d(f+g)=df+dg$

(ii) $d(f-g)=df-dg$

(iii) $d(fg) = gdf + fdg$

(iv) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

が成り立つ．

証明.

(i)
$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)_x dx + (f+g)_y dy \\ &= (f_x + g_x)dx + (f_y + g_y)dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) + (g_x dx + g_y dy) \\ &= df + dg. \end{aligned}$$

(ii) (i) と同様.

(iii)
$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)_x dx + (fg)_y dy \\ &= (f_x g + f g_x)dx + (f_y g + f g_y)dy \\ &= (f_x g dx + f_y g dy) + (f g_x dx + f g_y dy) \\ &= g(f_x dx + f_y dy) + f(g_x dx + g_y dy) \\ &= gdf + fdy. \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right) &= \left(\frac{f}{g}\right)_x dx + \left(\frac{f}{g}\right)_y dy \\ &= \left(\frac{f_x g - f g_x}{g^2}\right) dx + \left(\frac{f_y g - f g_y}{g^2}\right) dy \\ &= \frac{(f_x g dx + f_y g dy) + (f g_x dx + f g_y dy)}{g^2} \\ &= \frac{g(f_x dx + f_y dy) + f(g_x dx + g_y dy)}{g^2} \\ &= \frac{gdf + fdg}{g^2}. \end{aligned}$$

□

D において偏導関数 f_x, f_y が全微分可能であるとき，全微分 df の全微分 $d^2 f = d(df)$ を考えることができます．実際,

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d(f_x dx + f_y dy) \\ &= d(f_x)dx + f_x d(dx) + d(f_y)dy + f_y d(dy) \\ &= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + f_x d^2 x + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy + f_y d^2 y \\ &= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2 x + f_y d^2 y \end{aligned}$$

となります．

x が独立変数の場合，先に見たように $dx = h$ となります．h は独立変数なので，$d^2 x = 0$ となります．同様に y が独立変数ならば $d^2 y = 0$ となります．したがって，x, y が独立変数のとき，

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

となります．またこのとき一般に，f の $n-1$ 階の偏導関数が存在して，それらがすべて全微分可能であるとき，

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \cdots + \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k y^{n-k}} dx^k dy^{n-k} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n$$

が成り立ちます．これを

$$d^n f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$$

と略記します．