1　代数学の基本定理

1.1　Step 1

[補題 1.1] m を正の整数, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする．このとき, 方程式 $X^m - \gamma = 0$ は $\mathbb{C}$ において解をもつ．

[証明] γ を $\mathbb{C}$ の元とすると,

$$\gamma = |\gamma|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

と極座標表示で書ける．

$$\alpha = \sqrt[m]{|\gamma|}\left(\cos\frac{\theta}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{m}\right) \in \mathbb{C}$$

とおくと,

$$\left(\cos\frac{\theta}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{m}\right)^m = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

が成り立つから,

$$\alpha^m = |\gamma|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \gamma.$$

したがって, α は $X^m - \gamma = 0$ の解である． □

1.2　Step 2

$a \in \mathbb{C}$ と実数 $r > 0$ に対して,

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

と定義する．$D(a, r)$ を, a を中心とする半径 r の**円板**という．$D(a, r)$ の部分集合

$$S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

を $D(a, r)$ の**円周**という．また,

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

を $D(a, r)$ の**内部**という．

$\mathbb{C}$ の部分集合 D が $\mathbb{C}$ の**開集合**であるとは, 任意の $z \in D$ に対して, ある実数 $r > 0$ が存在して, $B(z, r) \subseteq D$ が成り立つときにいう．$\mathbb{C}$ 自身は明らかに $\mathbb{C}$ の開集合である．

[補題 1.2] $R > 0$ を実数, $a \in \mathbb{C}$, $b \in B(a, R)$ とする．このとき, ある実数 $r > 0$ が存在して, $B(b, r) \subseteq B(a, R)$ が成り立つ．したがって, 円板の内部は開集合である．

［証明］ $s = |b-a|$, $r = R - s$ とおく．$s < R$ より, $r > 0$.
　$z \in B(b,r)$ を任意にとると, $|z-b| < r$ であるから,

$$\begin{aligned} |z-a| &= |(z-b)+(b-a)| \\ &\le |z-b| + |b-a| \\ &< r + s = R. \end{aligned}$$

ゆえに, $z \in B(b,r)$．したがって, $B(b,r) \subseteq B(a,R)$. □

［補題 1.3］ $f(X)$ を定数でない複素数係数多項式とする．また, $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, $f(\alpha) \neq 0$ であるとする．このとき, 任意の実数 $r > 0$ に対して, ある $z_0 \in B(\alpha, r)$ が存在して, $|f(z_0)| < |f(\alpha)|$ が成り立つ．

［証明］ $b = f(\alpha)$ とおき,

$$f(X) = b + a(X-\alpha)^m + (X-\alpha)^{m+1} g(X), \quad g(X) \in \mathbb{C}[X]$$

とする．ただし, m はある正の整数，$a \neq 0$ である．補題 1.1 より, 方程式 $X^m + (b/a) = 0$ は解 $c \in \mathbb{C}$ を持つ．$b/a \neq 0$ より, $c \neq 0$ である．
　実数 $r_0 > 0$ に対して,

$$z_0 = \frac{r_0}{c} + \alpha \tag{1}$$

とおくと,

$$f(z_0) = b\bigl(1 - r_0^m + r_0^{m+1} h(r_0)\bigr), \quad h(X) \in \mathbb{C}[X]$$

となる．$r_0 < 1$ ならば,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\le |b|\bigl(|1 - r_0^m| + |r_0^{m+1} h(r_0)|\bigr) \\ &= |b|\bigl(1 - r_0^m + r_0^{m+1}|h(r_0)|\bigr) \\ &= |b| - |b|\, r_0^m \bigl(1 - r_0|h(r_0)|\bigr) \\ &= |f(\alpha)| - |f(\alpha)|\, r_0^m \bigl(1 - r_0|h(r_0)|\bigr). \end{aligned} \tag{2}$$

$h(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_k X^k$ とおき, $B = \max\{|b_1|\ \ldots, |b_k|, 1\}$ とおくと, $B \geq 1$ であり,

$$\begin{aligned} r_0|h(r_0)| &= r_0|b_0 + b_1 r_0 + \cdots + b_k r_0^k| \\ &\le r_0(|b_0| + |b_1| r_0 + \cdots + |b_k| r_0^k) \\ &\le r_0 B(1 + r_0 + \cdots + r_0^k) \\ &\le r_0 B(k+1). \end{aligned}$$

最後の不等式で $r_0 < 1$ を用いた．$r_0 < 1/B(k+1)$ のとき, $1 - r_0|h(r_0)| > 0$ が成り立つ．仮定より $f(\alpha) \neq 0$ であるから, (2) より,

$$|f(z_0)| < |f(\alpha)|. \tag{3}$$

以上より, 任意の実数 $r > 0$ に対して，r_0 を

$$r_0 < \min\{r|c|, 1/B(k+1)\}$$

を満たすようにとり, z_0 を (1) で定めれば,

$$|z_0 - \alpha| = \frac{r_0}{|c|} < r,$$

すなわち $z_0 \in B(\alpha, r)$ となり, (3) が成り立つ． □

1.3 Step 3

複素数列 $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ が $a \in \mathbb{C}$ に**収束**するとは, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう．このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

あるいは

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と書く．またこのとき, a を $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ の**極限値**という．

［補題 1.4］ $r > 0$ を実数とし, $D(0, r)$ を原点中心, 半径 r の円板とする．このとき, $D(0, r)$ 内の点列が収束すれば, その極限値は $D(0, r)$ に属する．

［証明］ 背理法で証明する．仮に $D(0, r)$ 内の点列 $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ で，その極限値 a が $D(0, r)$ に属さないものが存在したとする．

a は $D(0, r)$ に属さないのだから, $|a| > r$ である．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \in D(0, r)$ だから, $|a_n| \leq r$ である．ゆえに,

$$|a_n - a| \geq |a| - |a_n| \geq |a| - r > 0. \tag{4}$$

$\varepsilon = |a| - r$ とおくと, a は点列 $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ の極限値だから, ε に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．ところが, これは $n > N$ なる自然数 n をとったとき (4) に矛盾する．したがって, $D(0, r)$ 内の点列が極限値 a を持つとき，a は $D(0, r)$ に属さなければならない． □

1.4 Step 4

D を $\mathbb{C}$ の有界でない部分集合, $f(z)$ を D 上定義された複素数値関数とする. $|z| \to \infty$ のとき $|f(z)|$ が ∞ に**発散**するとは, 任意の実数 $R > 0$ に対して, ある実数 $M > 0$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対して,

$$|z| > M \Longrightarrow |f(z)| > R$$

が成り立つときにいう. このことを

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$$

あるいは

$$|f(z)| \to \infty \quad (|z| \to \infty)$$

と書く.

[補題 1.5] $f(X)$ を定数でない複素数係数多項式とする. このとき, $|f(z)| \to \infty$ $(|z| \to \infty)$ が成り立つ.

[証明] $n = \deg f$ に関する数学的帰納法により証明する.

$n = 1$ のとき,

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

と表せる. 任意の実数 $R_1 > 0$ に対して, $M_1 = (R_1 + |b|)/|a|$ とおくと, $|z| > M_1$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$|a||z| - |b| > |a|M_1 - |b| = R_1 > 0$$

であるから,

$$|f(z)| \geq \big||a||z| - |b|\big| = |a||z| - |b| > R_1.$$

よって, $|f(z)| \to \infty$ $(|z| \to \infty)$ となる.

$n > 1$ のとき, $n-1$ 次多項式については主張が正しいとする. n 次多項式 $f(X)$ は, $n-1$ 次多項式 $g(X)$ を用いて $f(X) = Xg(X) + f(0)$ と表される. 帰納法の仮定より, 任意の実数 $R_{n-1} > 0$ に対して, ある実数 $M_{n-1} > 0$ が存在して, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$|z| > M_{n-1} \Longrightarrow |g(z)| > R_{n-1}$$

が成り立つ. このとき, 任意の実数 $R > 0$ に対して, $M = \max\{(R + |f(0)|)/R_{n-1}, M_{n-1}\}$ とおくと, $|z| > M$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}
|z||g(z)| - |f(0)| &> M|g(z)| - |f(0)| \\
&= (R + |f(0)|)\frac{|g(z)|}{R_{n-1}} - |f(0)| \\
&> (R + |f(0)|) - |f(0)| = R > 0
\end{aligned}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\geq \big||z||g(z)| - |f(0)|\big| \\
&= |z||g(z)| - |f(0)| > R.
\end{aligned}
$$

したがって, n のときも主張は正しい. □

1.5 Step 5

D を $\mathbb{C}$ の部分集合, $f(z)$ を D 上定義された複素数値関数, $a \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. $f(z)$ が a で α に**収束**するとは, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある実数 $\delta > 0$ が存在して，任意の $z \in D$ に対して,

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう. このことを

$$\lim_{z \to a} f(z) = \alpha$$

あるいは

$$f(z) \to \alpha \quad (z \to a)$$

と書く. またこのとき, α を $f(z)$ の a での**極限値**という.

$f(z)$ が $a \in D$ において**連続**であるとは,

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \tag{5}$$

が成り立つときにいう. 条件 (5) を厳密に述べると次にようになる: 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある実数 $\delta > 0$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対して,

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

$\lim_{z \to a} z = a$ であるから, 条件 (5) は

$$\lim_{z \to a} f(z) = f\left(\lim_{z \to a} z\right)$$

と同値である.

$f(z)$ が D において**連続**であるとは, D の各点で $f(z)$ が連続であるときにいう.

[補題 1.6] D を $\mathbb{C}$ の部分集合, $f(z)$ を D 上定義された複素数値連続関数とする. このとき, $|f(z)|$ は D 上定義された実数値連続関数である.

[証明] 複素数の絶対値は実数だから, $|f(z)|$ は実数値関数である.

$a \in D$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $f(z)$ は D で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対して

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

不等式

$$\big||f(z)| - |f(a)|\big| \leq |f(z) - f(a)|$$

より,

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow \big||f(z)| - |f(a)|\big| < \varepsilon.$$

ゆえに, $|f(z)|$ は a において連続である. a は D の任意の点だから, $|f(z)|$ は D において連続である. □

1.6 Step 6

複素数列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が **Cauchy 列**であるとは, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$m, n > N \Longrightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$$

が成り立つときにいう.

[補題 1.7] $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ を複素数列とするとき, 次の 2 つの条件は同値である:

(i) $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ は収束列である.

(ii) $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ は Cauchy 列である.

[証明] 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して, 不等式

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$$

が成り立つ.

このことから, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ と $a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} |z_n - a| < \varepsilon &\Longleftrightarrow |\mathrm{Re}(z_n - a)| < \varepsilon \text{ かつ } |\mathrm{Im}(z_n - a)| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow |\mathrm{Re}\, z_n - \mathrm{Re}\, a| < \varepsilon \text{ かつ } |\mathrm{Im}\, z_n - \mathrm{Im}\, a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, 複素数列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が収束することは, 2 つの実数列 $(\mathrm{Re}\, z_n \mid n \in \mathbb{N})$, $(\mathrm{Im}\, z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が収束することと同値である. それぞれが収束することは, それぞれが Cauchy 列であることと同値である. さらに, 任意の実数 $\varepsilon > 0$ と $m, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} |z_m - z_n| < \varepsilon &\Longleftrightarrow |\mathrm{Re}(z_m - z_n)| < \varepsilon \text{ かつ } |\mathrm{Im}(z_m - z_n)| < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow |\mathrm{Re}\, z_m - \mathrm{Re}\, z_n| < \varepsilon \text{ かつ } |\mathrm{Im}\, z_m - \mathrm{Im}\, z_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

であるから, 2 つの実数列 $(\mathrm{Re}\, z_n \mid n \in \mathbb{N})$, $(\mathrm{Im}\, z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が Cauchy 列であることは, 複素数列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が Cauchy 列であることと同値である. □

[補題 1.8] $\alpha, a \in \mathbb{C}$ とし, $\delta_0 > 0$ を実数とする. また,

$$D = B(a, \delta_0) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \delta_0\}$$

とし, $f(z)$ を D 上定義された複素数値関数とする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である:

(i) $\lim_{z \to a} f(z) = \alpha$.

(ii) D の任意の点列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \alpha$$

が成り立つ.

[証明] (i)⇒(ii)　実数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. (i) を仮定しているから, ある実数 $\delta > 0$ が存在して, 任意の $z \in D$ に対して,

$$0 < |z - a| < \delta \Longrightarrow 0 < |f(z) - \alpha| < \varepsilon.$$

$\lim_{n \to \infty} z_n = a$ とすると, δ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n > N \Longrightarrow |z - a| < \delta.$$

ゆえに,

$$n > N \Longrightarrow |f(z_n) - \alpha| < \varepsilon.$$

したがって, $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \alpha$ となる.

(ii)⇒(i)　背理法により証明する. (i) が成り立たないとすると, ある実数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の実数 $\delta > 0$ に対して, ある $z_\delta \in D$ が存在して,

$$0 < |z_\delta - a| < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(z_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$$

を満たす. 例えば, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta = \delta_0/(n+1)$ とし, それに対応する z_δ を z_n と書けば,

$$0 < |z_n - a| < \frac{\delta_0}{n+1} \quad \text{かつ} \quad |f(z_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$$

となる. しかしながら, このような D の点列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が存在することは (ii) に反する. □

[補題 1.9] $r > 0$ を実数とし, $D(0, r)$ を原点中心, 半径 r の円板, $f(z)$ を $D(0, r)$ 上定義された実数値連続関数とする. このとき, $f(z)$ は $D(0, r)$ 上で最大値および最小値をとる.

[証明] 最大値について証明ができれば十分である．最小値については $-f(z)$ の最大値の存在からわかる．

背理法により証明する．$f(z)$ が $D(0,r)$ 上で最大値をもたないと仮定して矛盾を導く．

$f(z)$ が $D(0,r)$ 上で最大値をもたないとき，$f\bigl(D(0,r)\bigr) = \{f(z) \mid z \in D(0,r)\}$ が上に有界であるかそうでないかで 2 つの場合に分かれる．

(i) $f\bigl(D(0,r)\bigr)$ が上に有界でない: 任意の実数 R に対して，ある $D(0,r)$ の元 z が存在して，$f(z) > R$ となる．

(ii) $f\bigl(D(0,r)\bigr)$ が上に有界である: $\alpha = \sup\{f(z) \mid z \in D(0,r)\}$ とする．任意の $z \in D(0,r)$ に対して，$f(z) \neq \alpha$ である．だが，$D(0,r)$ の点列 $(z_n \mid n \in \mathbb{N})$ が存在して，$f(z_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ となる．

$D(0,r)$ の点列 $(p_n \mid n \in \mathbb{N})$ を，各自然数 n に対して，(i) の場合には $f(p_n) > n$ であるように定め，(ii) の場合には $\alpha - (1/n) < f(p_n) < \alpha$ であるように定める．

さて，格子

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$$

によって複素数平面 $\mathbb{C}$ を一辺の長さが $1/2$ の正方形に分ける．$D(0,r)$ はそれらの正方形のうち有限個で覆われるから，それらの正方形で $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点が無限個入っているものがある．そのうちの 1 つを S_1 とする．

次に S_1 を 4 等分して，一辺の長さが $1/4$ の正方形に分ける．するとその中に $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点が無限個入っているものがある．そのうちの 1 つを S_2 とする．

以下，同様の操作を繰り返せば，正方形の列 $(S_n \mid n \in \mathbb{N})$ が得られ，次の条件を満たす．

(a) S_i の一辺の長さは $1/2^i$.

(b) $S_{i+1} \subsetneq S_i$.

(c) S_i は $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点を無限個含む.

今度は，$D(0,r)$ の点列 $(q_n \mid n \in \mathbb{N})$ を次のように定める．まず q_1 は S_1 に属する $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の点のうちの 1 つとする．q_{i-1} まで定まったとき，$q_{i-1} = p_m$ であるような番号 m に対して，q_i は S_i に属する p_n のうちで $n > m$ であるようなものとする．すると，点列 $(q_n \mid n \in \mathbb{N})$ について

$$i < j \Longrightarrow q_i, q_j \in S_i \Longrightarrow |q_i - q_j| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^i}.$$

したがって，$(q_n \mid n \in \mathbb{N})$ は Cauchy 列であるから，補題 1.7 より極限値 q をもつ．補題 1.4 より，q は $D(0,r)$ に属する．$f(z)$ は $D(0,r)$ において連続だから，補題 1.8 より，

$$f(q) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(q_n).$$

(i) の場合，右辺は $+\infty$ に発散するから矛盾．(ii) の場合，右辺は α となるが，α が $f(z)$ の取り得る値でなかったことに反する． $\square$

1.7　Step 7

［定理 1.10（代数学の基本定理）］ $f(X)$ を定数でない複素数係数多項式とする．このとき, 方程式 $f(X)=0$ は $\mathbb{C}$ において解をもつ.

［証明］ 補題 1.5 より，十分大きな実数 $R>0$ をとると，

$$|f(w)| > |f(0)| \quad \bigl(\forall w \in S(0,R)\bigr). \tag{6}$$

関数 $|f(z)|$ は, 補題 1.6 より $D(0,R)$ 上で連続だから，補題 1.9 より $D(0,r)$ 上で最小値をとる．すなわち, $|f(\alpha)|$ が関数 $|f(z)|$ の $D(0,r)$ 上の最小値であるような $\alpha \in D(0,R)$ が存在する．$|f(\alpha)| \leq |f(0)|$ だから，(6) より, $\alpha \in B(0,R)$．補題 1.2 より, ある実数 $r>0$ が存在して, $B(\alpha,r) \subseteq B(0,R)$．このとき, 任意の $z \in D(\alpha,r)$ に対して, $|f(\alpha)| \leq |f(z)|$．したがって, 補題 1.3 の対偶より, $f(\alpha)=0$ でなければならない. □